

Soluciones de Auxiliar N°6

Electromagnetismo

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Felipe Larraín y Víctor Medina.

5 de Mayo del 2010

Pregunta 1:

(a) $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = kR;$
 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -3k.$

(b) Para $r < R$, $\vec{E} = -\frac{k}{\epsilon_0} \hat{r}$
Para $r > R$, es como si toda la carga estuviera en el centro, pero la carga total es cero y por simetría esférica $\vec{E} = 0$

Pregunta 2:

La carga total en el dieléctrico neutro es $Q_{enc} = \oint_S \sigma_b da + \int_V \sigma_b dr = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{a} - \int_V \nabla \cdot \vec{P} dr$, pero $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{P} dr$, luego, $Q_{enc} = 0$

Pregunta 3:

(a) $\sigma_b = -\frac{k}{r^2};$
 $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \begin{cases} k/b & \text{si } r = b \\ -k/a & \text{si } r = a \end{cases}$

Por ley de Gauss $\vec{E} = 0$, para $r < a$ y $r > b$

Y para $a < r < b$, $\vec{E} = -(k/\epsilon_0 r) \hat{r}$

(b) $\oint \vec{D} d\vec{a} = Q_{f_{enc}} = 0$ en todo el espacio, luego, como se tiene que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, el resultado es el mismo calculado anteriormente.

Pregunta 4:

(a) La capacidad del sistema viene dada por $C = \frac{L}{d}(\epsilon x + \epsilon_0(L - x))$, luego la energía total $U_T = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, por lo tanto, la fuerza es $F_x = -\frac{\partial U_T}{\partial x}$, por lo tanto la fuerza actúa de tal manera que el dieléctrico interno crece, ya que la fuerza actúa en la dirección de x .

- (b) No cambia cuantitativamente, pero hay que darse cuenta que ahora se debe incorporar el trabajo realizado por la batería, es decir, ahora $\Delta U_T = \Delta \left(\frac{1}{2} C V^2 \right) - V \Delta Q = -\frac{1}{2} V^2 \Delta C$

Problema 5

(a) Como las superficies esféricas son conductores, las cargas presentes por enunciado $+Q$ y $-Q$ son libres. Las distribuciones son uniformes por la simetría del problema: las permitividades dieléctricas de cada medio son constantes con interfaz paralela al campo eléctrico. Así, como el campo eléctrico es el mismo para todo ángulo θ, ϕ **no hay concentración de cargas en ningún sector, (si lo hubiera, el campo no sería uniforme para todo ángulo).**

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2} \\ \sigma_b = -\frac{Q}{4\pi b^2} \end{cases}$$

(b)

$$\vec{D}_1(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{D}_2(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \hat{r}$$

(c)

$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

Por la presencia de cargas libres hay cargas de polarización en el sistema. Dichas cargas se alojan en la vecindad de los casquetes esféricos y tienen signo opuesto a ellos. Pueden ser calculadas obteniendo el vector polarización y con $\vec{E}$, las cargas superficiales y volumétricas de polarización.

Problema 6

$$V(h) = V_0 \left(\frac{h\varepsilon_0 + (d-h)\varepsilon}{h\varepsilon_0 + \varepsilon(d-h+a)} \right)$$

Problema 7

a) Por ley de Gauss, utilizando una superficie cerrada cilíndrica entre el medio de la derecha, la placa conductora con carga $+\sigma$, ($x = d$), y el medio en cuestión, sólo influye la cara del cilindro que queda encerrada en $x < d$. (El manto tiene normal perpendicular y el campo para $x > d$ es nulo). Entonces,

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{-\sigma}{4\varepsilon_0} \left[\left(\frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right] \hat{i} & |x| < d \\ 0 & |x| > d \end{cases}$$

(b)

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \left[\frac{1}{d^2} \left(\frac{x^3+d^3}{3} \right) + (x+d) \right] & |x| < d \\ V_0 & d \leq x \\ 0 & x \leq -d \end{cases}$$

(c) Las densidades de carga superficial son iguales en magnitud y opuestas en signo. Basta que igualemos el potencial en $x = d$ con las dos expresiones que se tienen, y se despeja la densidad superficial. Ojo, que el campo no está definido para $x = d$, no así el potencial, que es la integral del primero.

$$\sigma = \frac{3V_0\varepsilon_0}{2d}$$

(Para $-\sigma$ basta cambiar el signo).

(d)

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} \Rightarrow \vec{P}(x) = \begin{cases} \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{4} \left(\left(\frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right) & |x| < d \\ 0 & |x| > d \end{cases}$$

(e)

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\sigma x}{2d^2}$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

Donde el σ_p calculado corresponde al efecto a la derecha. (A la izquierda es simplemente el mismo, con signo contrario, pues las normales son opuestas.