

Solución Auxiliar N°2

Profesor Cátedra: Claudio Romero

Profesores Auxiliares: Felipe Larraín, Víctor Medina

Fecha: Lunes 12 de Abril de 2010

Problema 1

Parte 1

Dada la naturaleza de la geometría de la situación, se hace necesario utilizar el ppio. de superposición. Eso sí, en este caso podemos ocupar adicionalmente la *Ley de Gauss*, facilitando la obtención del campo eléctrico. La idea es primero encontrar el valor de los campos en P, para luego sumarlos (para lo que habrá que efectuar una transformación entre los sistemas de referencia).

Para la recta, utilizamos un cilindro que encierre un cierto volúmen, con dicha recta en su eje. Denotamos A la altura de él, información sólo necesaria para caracterizarlo. Después, notamos posible dirección y/o coordenada(s) de dependencia del campo y llevamos a cabo el cálculo.

Dada la simetría del problema, (en altura y orientación se enfrenta el mismo escenario), es razonable suponer que el campo depende del radio, y que su dirección apunta según $\hat{r}$, expresado en coordenadas cilíndricas.

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r)\hat{r}$$

Si bien la superficie para *Gauss* representa toda la cubierta del volúmen del cilindro, sólo ciertas partes son de interés. Las tapas, arriba y abajo, tienen normales perpendiculares a $\hat{r}$, lo que muestra que los productos puntos en la integral serán cero. De ésta forma, sólo importa el manto del cilindro. Así:

$$\begin{aligned} \oint_{S=dV} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_V}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \int_{TapaSuperior} E(r)\hat{r} \cdot r dr d\theta \hat{k} + \int_{TapaInferior} E(r)\hat{r} \cdot r dr d\theta (-\hat{k}) + \int_{Manto} E(r)\hat{r} \cdot r d\theta dz \hat{r} &= \frac{Q_V}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \int_0^A \int_0^{2\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r d\theta dz &= \frac{A\lambda}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \end{aligned}$$

Para el plano, efectuamos un razonamiento análogo. Por conveniencia, nuevamente elegimos un cilindro. Esta vez eso sí, la simetría del problema cambia, por lo que las suposiciones sobre dependencia y dirección del campo son igualmente distintas.

Sabemos que hay simetría en orientación y radio, pero no *necesariamente* en altura. Por ello, podemos asumir que el campo dependerá, en el peor caso, de z . Por la forma del problema, se sabe con certeza que la dirección del campo es según $\hat{k}$, o $-\hat{k}$, dependiendo del sistema de referencia y la posición de medición en el espacio. Para esta situación podemos asumir $\hat{k}$, colocando correspondientemente el sist. de referencia. Adicionalmente vemos que sólo las tapas del cilindro son de interés, pues el manto, con normal según $\hat{r}$, anula su aporte a la integral. Así, (ojo que el aporte de las tapas es doble):

$$\vec{E}(r, \theta, z) = \left\{ \begin{array}{ll} E(z)\hat{k} & z > 0 \\ E(z)(-\hat{k}) & z < 0 \end{array} \right\}$$

Entonces,

$$\oint_{S=dV} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{TapaSuperior} E(z)\hat{k} \cdot r dr d\theta \hat{k} + \int_{TapaInferior} E(z)(-\hat{k}) \cdot r dr d\theta (-\hat{k}) + \int_{Manto} E(z)\hat{k} \cdot r d\theta dz \hat{r} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^r E(z)\hat{k} \cdot \hat{k} r dr d\theta = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\vec{E}(z) \frac{r^2}{2} 2\pi = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Para unir los resultados basta intercambiar r por h en el campo producido por la recta, (para referir al punto P directamente, ya que el aporte del campo generado por el plano es cte. independiente de la posición), y escribir $\hat{r}$ en el sistema de referencia del plano. De un análisis geométrico, (ver figura)

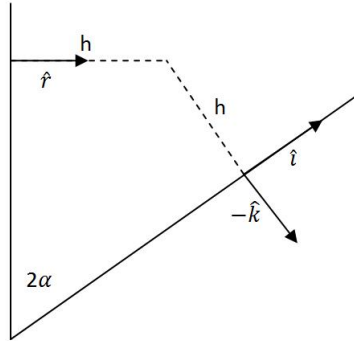


Figura 1.

$$\sin(2\alpha)\hat{i} - \cos(2\alpha)\hat{k} = \hat{r} \Rightarrow$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h} \left(\sin(2\alpha)\hat{i} - \cos(2\alpha)\hat{k} \right)$$

Por supuesto, queda a criterio de quien resuelva el problema el sistema en que quiera escribir la solución, mientras sea ortonormal.

Parte 2

El problema es muy similar al anterior. Dadas las características del sistema, (algo así como un sandwich de altura finita y área infinita), debemos resolver diferenciando dos situaciones, i) $-H < z < H$ y ii) $z > H \vee z < -H$

Poniendo el sistema de referencia en el plano cargado a la mitad del sistema, podemos decir que, al igual que antes

$$\vec{E}(r, \theta, z) = \left\{ \begin{array}{ll} E(z)\hat{k} & z > 0 \\ E(z)(-\hat{k}) & z < 0 \end{array} \right\}$$

i) Usando una superficie cilíndrica con altura $2z$, centrada tal que sobresalga z en el lado superior e inferior, se tiene que

$$\oint_{S=dV} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{TapaSuperior} E(z)\hat{k} \cdot r dr d\theta \hat{k} + \int_{TapaInferior} E(z)(-\hat{k}) \cdot r dr d\theta (-\hat{k}) + \int_{Manto} E(z)\hat{k} \cdot r d\theta dz \hat{r} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$2\vec{E}(z)\frac{r^2}{2}2\pi = \frac{\sigma\pi r^2 + 2z\pi r^2\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma + 2\rho z}{2\varepsilon_0}$$

ii) Realizando lo mismo que antes pero ahora para la segunda región,

$$\oint_{S=dV} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{TapaSuperior} E(z)\hat{k} \cdot r dr d\theta \hat{k} + \int_{TapaInferior} E(z)(-\hat{k}) \cdot r dr d\theta (-\hat{k}) + \int_{Manto} E(z)\hat{k} \cdot r d\theta dz \hat{r} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$2\vec{E}(z)\frac{r^2}{2}2\pi = \frac{\sigma\pi r^2 + 2H\pi r^2\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma + 2\rho H}{2\varepsilon_0}$$

Problema 2

(1) Planteando la integral con coordenadas esféricas por simplicidad, tendremos que:

$$\int_{esfera} \rho(\vec{r})dV = \int_{esfera} \frac{5k}{4\pi a^5} r^2 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = Q_{total} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{5k}{4\pi a^5} r^4 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \frac{5k}{4\pi a^5} \left(\frac{a^5}{5}\right) (2) (2\pi) = k$$

(2) Nuevamente por *Ley de Gauss*, asumiendo:

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r)\hat{r}$$

Dada la distribución de cargas, finita, debemos separar los casos para el campo eléctrico en r . Usando coordenadas esféricas, se tiene:

Si $r < a$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{\int \frac{5k}{4\pi a^5} r^4 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r)r^2 4\pi = \frac{5k}{4\pi a^5} \frac{r^5}{5\varepsilon_0} 4\pi \Rightarrow E(r) = \frac{kr^3}{4\pi a^5 \varepsilon_0}$$

Si $r > a$

$$\oint_{S=dV} \vec{E}(r) d\vec{S} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{k}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{k}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{k}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Observación: Es importante notar que el campo es continuo en a . Esto no es algo trivial y en general debiera analizarse por separado.

(3) El potencial eléctrico corresponde al valor del trabajo que se necesita para mover una carga en presencia de campo eléctrico no nulo. Como depende directamente del campo eléctrico, (dada su definición), el cálculo también será diferenciado según el radio de la esfera fuente, por regiones. Dado que esta posee una cantidad finita de cargas, se asume que $V(r = \infty) = 0$. Por definición:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

Si $r > a$

$$V(r\hat{r}) = - \int_{\infty}^r \frac{k}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \hat{r} = \frac{k}{4\pi r \varepsilon_0}$$

Si $r \leq a$

$$V(r) = - \int_{\infty}^a \frac{k}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \hat{r} + - \int_a^r \frac{kr^3}{4\pi a^5 \varepsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} \hat{r} = \frac{k}{4\pi a \varepsilon_0} + \frac{k}{4\pi \varepsilon_0 a^5} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{a^4}{4} \right)$$

Problema 3

i) Consideremos la siguiente figura para modelar el problema, en que las líneas “entran y salen” del plano de la hoja.

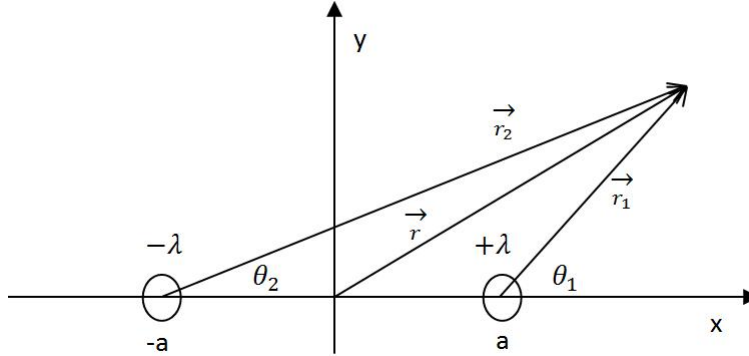


Figura 2.

Sabemos que para una línea infinita cargada con densidad de carga λ por unidad de largo, en coordenadas cilíndricas,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

En este problema entonces,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} \hat{r}_1 - \frac{1}{r_2} \hat{r}_2 \right]$$

Para encontrar la forma que tienen las líneas de campo queremos plantear la siguiente expresión: (o el inverso de ella si quisieran, lo importante es representar la tangente paralela al campo eléctrico en cada punto)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{E_x}{E_y} (1)$$

Necesitamos las componentes E_x y E_y . Si escribimos $\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j}$, tendremos de la figura que:

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos\theta_1}{r_1} - \frac{\cos\theta_2}{r_2} \right)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sin\theta_1}{r_1} - \frac{\sin\theta_2}{r_2} \right)$$

Si ahora intentáramos escribir (1), no podríamos resolverla pues se trataría de una expresión división de restas de fracciones, en gral. difícil de manejar. Usaremos algunas propiedades geométricas básicas de la situación para simplificarla:

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{x-a}{r_1}; & \sin\theta_1 = \frac{y}{r_1} \\ \cos\theta_2 = \frac{x+a}{r_2}; & \sin\theta_2 = \frac{y}{r_2} \\ r_1^2 = (x-a)^2 + y^2; & r_2^2 = (x+a)^2 + y^2 \end{cases} \quad (*)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{E_y} &= \frac{\frac{\cos\theta_1 r_2 - \cos\theta_2 r_1}{r_1 r_2}}{\frac{\sin\theta_1 r_2 - \sin\theta_2 r_1}{r_1 r_2}} = \frac{(x-a)\frac{r_2}{r_1} - (x+a)\frac{r_1}{r_2}}{y\frac{r_2}{r_1} - y\frac{r_1}{r_2}} = \frac{(x-a)r_2^2 - (x+a)r_1^2}{y(r_2^2 - r_1^2)} \\ &= \frac{(x-a)((x+a)+y^2) - (x+a)((x-a)^2+y^2)}{4yax} = \frac{x}{y} - \frac{x^2+a^2+y^2}{2xy} \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{x^2+a^2+y^2}{2xy}$$

$$\frac{dx}{dy} 2x = \frac{x^2 - a^2 - y^2}{y} \quad (2)$$

Resolver esta ecuación diferencial requiere alguna técnica de resolución pues es no lineal. Podemos simplificar la expresión para integrarla en forma directa. Usamos el siguiente cambio de variable (resolveremos con la ecuación (2) a w , y lo volveremos a introducir en el cambio para concluir):

$$x^2 = a^2 + yw \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx}()$$

$$2x = \frac{dy}{dx}w + \frac{dw}{dx}y$$

Usando esto en la ecuación (2),

$$\left(\frac{dy}{dx}w + \frac{dw}{dx}y \right) \frac{dx}{dy} = \frac{yw - y^2}{y} = w - y$$

Finalmente,

$$dw = -dy, w(y) = -y + k_0$$

Con k_0 alguna constante de integración cualquiera. Despejando (3) con la expresión anterior obtenemos que se cumple lo siguiente:

$$x^2 = a^2 - y^2 + k_0 y \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{k_0}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{k_0^2}{4}$$

Por lo tanto, las líneas de fuerza son círculos con radio $\sqrt{a^2 + \frac{k_0^2}{4}}$ y centro en $(0, \frac{k_0}{2})$. Vemos que todos estos círculos pasan por $x = \pm a$, pues sin importar k_0 siempre se satisfacen $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. Las líneas quedan como se ve en la figura:

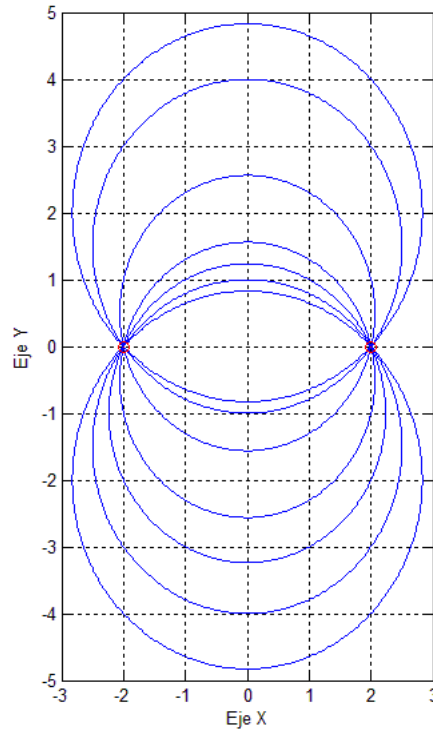


Figura 3: Gráfica en Matlab de lo obtenido para $a = \pm 2$ y $k_0 = 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, -4$

ii) Para obtener las superficies equipotenciales debemos plantear

$$V(\vec{r}) = V_0$$

y desde allí despejar los lugares geométricos que representan.

Para una línea cargada infinita, en coordenadas cilíndricas

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(r, \theta, z) \cdot d\vec{r} = - \int_{r_0}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Con $V(r_0\hat{r}) = 0$. Ojo que en este caso el potencial no se puede imponer nulo en infinito pues la distribución de carga es infinita. Por superposición:

$$V(r\hat{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Imponemos, (definiendo la nueva cte. V_1)

$$V(r\hat{r}) = V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow e^{\frac{2V_0\epsilon_0\pi}{\lambda}} = V_1 = \frac{r_2}{r_1}$$

Para escribir la última expresión en términos de las variables del sistema de referencia, x, y , usamos las relaciones en (*), la última fila. Despejando obtenemos,

$$(x+a)^2 + y^2 = V_1^2 ((x-a)^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2 + a^2) (1 - V_1^2) = -2ax (1 + V_1^2)$$

Se concluye que,

$$\left(x - \frac{a(1+V_1^2)}{V_1^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4V_1^2 a^2}{(1-V_1^2)^2}$$

Esto representa que las superficies equipotenciales son círculos y tienen centro en $\left(\frac{a(1+V_1^2)}{V_1^2-1}, 0\right)$ y radio $\frac{2a\|V_1\|}{V_1^2-1}$. Las superficies se ven como muestra la figura:

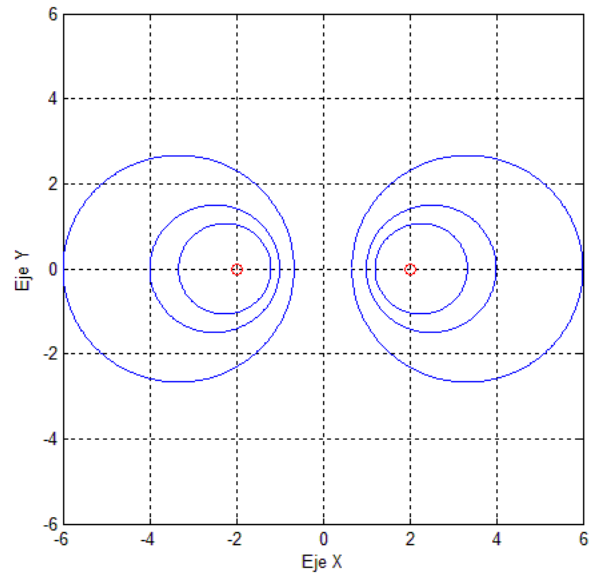


Figura 4. Gráfica en Matlab de lo obtenido para $a = \pm 2$ y $V_1 = 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$