Solución Clase Auxiliar N°2
Electromagnetísmo

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Felipe Figueroa y Víctor Medina.

7 de abril del 2010

Pregunta 1:

(a) Primero debemos calcular el campo eléctrico producido por un cable. Aplicamos ley de Gauss porque existe simetría evidente, luego tomando una superficie cilindrica de radio s y largo l, vemos que se tiene:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E2\pi sl = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

Es decir, el campo eléctrico es

$$\vec{E}(s) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s}$$

Luego el potencial está definido como la integral de línea del campo eléctrico y si tomamos como punto de referencia la distancia a nos queda:

$$V(s) = -\int_a^s \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} ds = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s}{a}\right)$$

Así, análogamente para el caso con $-\lambda$ tenemos los siguientes resultados:

$$V_{total} = V_+ + V_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{s_-}{s_+}\right)$$

Ahora debemos expresar s_+ y s_- en un mismo sistema de referencia. De la figura 1 se desprende que aplicando teorema de Pitágoras se tiene que $s_+ = \sqrt{(y-a)^2 + z^2}$ y por otra parte $s_- = \sqrt{(y+a)^2 + z^2}$, por consiguiente se tiene V con respecto al origen del sistema de referencia mostrado.

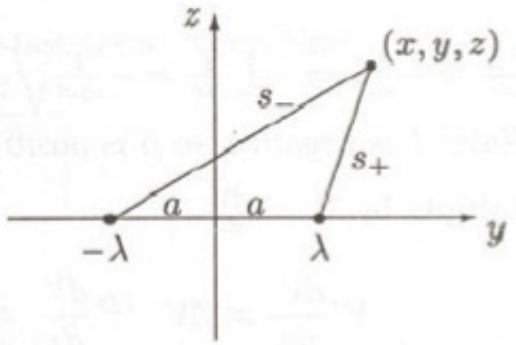

Fig. 1: vista transversal de los cables

(b) Para ver que familia de curvas forman las equipotenciales nos damos arbitrariamente un valor V_0 constante para el potencial total encontrado en (a), con lo cual queda:

$$\frac{(y+a)^2+z^2}{(y-a)^2+z^2} = e^{4\pi\epsilon_0 V_0/\lambda} = k$$

Luego, desarrollando la ecuación llegamos a:

$$y^2 + z^2 + a^2 - 2ay\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = 0$$

Además, sabemos que la ecuación de la circunferencia desplazada está dada por:
$(y-y_0)^2 + z^2 = R^2 \rightarrow y^2 + z^2 + (y_0^2 - R^2) - 2yy_0 = 0$, asi, si identificamos términos tenemos que:

$$R^2 = y_0^2 - a^2 = a^2\frac{4k}{(k-1)^2} = a\sinh^{-1}\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$$

Y por otro lado,

$$y_0 = a\frac{e^{4\pi\epsilon_0 V_0/\lambda}+1}{e^{4\pi\epsilon_0 V_0/\lambda}-1} = a\tanh^{-1}\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$$

Que gráficamente se vería algo así:

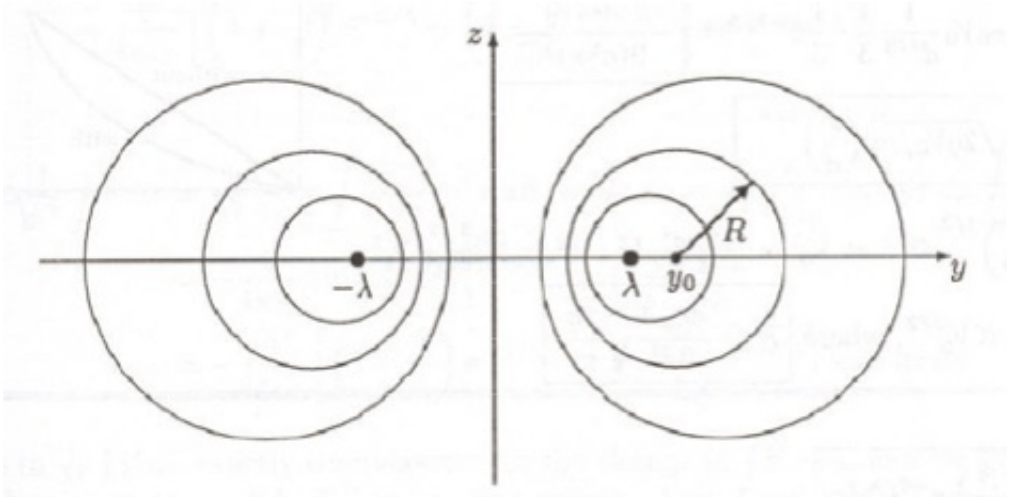

Fig. 2: líneas equipotenciales

Pregunta 2:

Podemos usar ley de Gauss en su forma integral, es decir:

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

Con S_0 la superficie de una esfera de radio $r^* = 1/\alpha$. Es decir,

$$Q_{encerrada} = \epsilon_0 c 4\pi (1 - e^{-\alpha r^*}) = 4\pi c \epsilon_0 (1 - e^{-1})$$

Pregunta 3:

Primero debemos calcular el campo eléctrico al interior de una esfera cargada homogéneamente con una densidad de carga volumétrica ρ (con la carga negativa es análogo). Para ello hacemos uso de la simetría del problema y ocupamos ley de Gauss en su forma integral:

$$\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Con S_0 la superficie de una esfera de radio r menor que R, luego al lado izquierdo nos queda $\int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2$ y al lado derecho, $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{Volumen \cdot \rho}{\epsilon_0}$. igualando términos tenémos que el campo eléctrico es:

$$\vec{E_+} = \frac{\rho \vec{r_+}}{3\epsilon_0}$$

Y para la esfera cargada negativamente se tiene:

$$\vec{E_-} = -\frac{\rho \vec{r_-}}{3\epsilon_0}$$

Así, cuando sumemos ambos campos eléctricos (por principio de superposición) en cualquier punto dentro de la región de solapamiento (ver figura 3) da que el campo eléctrico es constante e igual a:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}$$

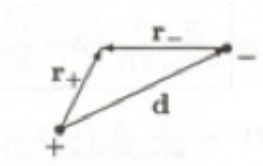

Fig. 3