Solución Auxiliar N°1

Profesor Cátedra: Claudio Romero

Profesores Auxiliares: Felipe Larraín, Víctor Medina

Fecha: Lunes 05 de Abril de 2010

Problema 1

Dada la complejidad geométrica del problema, facilitaremos el cálculo con el ppio. de superposición, obteniendo el valor deseado como resta entre los valores de campo eléctrico para la cinta completamente cargada, y un disco, también totalmente cargado. Para éste último, consideraremos el resultado obtenido en el apunte y visto en cátedra, que determina que dicho campo eléctrico es

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \left[\frac{z}{\|z\|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

con R el radio del disco. Así, sólo necesitamos obtener el primer campo eléctrico y restar.

Por definición:

$$\vec{E}(\vec{r} = z\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}')$$

Al parametrizar, tendremos que:

$$\vec{r} = z\hat{k}; \vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}; dq(\vec{r}') = \sigma dx' dy' \text{ con } -\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}, y -\infty \leq y \leq \infty$$

Entonces

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{(z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j})\sigma dx' dy'}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De los tres términos generados, por simetría, sólo el primero es no nulo, pues se trata en los dos casos siguientes de integrales de funciones impares en intervalo simétrico. El cálculo se reduce a:

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx' dy'}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy' (z^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Usando el conveniente cambio:

$$\sqrt{x'^2 + z^2} \operatorname{tg}(u) = y'$$

$$\sqrt{x'^2 + z^2} \operatorname{sec}^2(u) du = dy'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x'^2+z^2}\sec^2(u)du(z^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{((z^2+x'^2)\sec^2(u))^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2+x'^2)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)du = \frac{z\sigma\hat{k}}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2+x'^2)}
\end{aligned}$$

Por último, con:

$$z \operatorname{tg}(\alpha) = x'$$

$$z \sec^2(\alpha) d\alpha = dx'$$

$$= \frac{z\sigma\hat{k}}{2\pi\epsilon_0} \int_{\operatorname{arctg}(-\frac{w}{2z})}^{\operatorname{arctg}(\frac{w}{2z})} \frac{z \sec^2(\alpha) d\alpha}{z^2 \sec^2(\alpha)} = \frac{\sigma\hat{k}}{2\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{w}{2z}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{w}{2z}\right) \right] = \frac{\sigma\hat{k}}{\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg}\left(\frac{w}{2z}\right)$$

Con el resultado obtenido, sólo basta plantear la resta.

Problema 2

Del problema 1, el campo eléctrico para un disco cargado en $z > 0$ es el siguiente:

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right)$$

Para encontrar la fuerza entre el disco cargado y la varilla, debemos usar alguna ecuación de fuerza, y dada la continuidad del problema, integrar. No podemos sólo integrar el campo eléctrico del disco a lo largo de la ubicación de la varilla, (o viceversa el de la varilla a lo ancho del disco), pues dado que se encuentra cargada, ejerce una fuerza adicional que debe considerarse: las fuerzas entre ambas distribuciones de carga son, en régimen permanente, iguales y opuestas. El problema se resuelve considerando la varilla como una distribución de cargas infinitesimales. La fuerza eléctrica entre el campo del disco y cada diferencial de carga, integrada, soluciona el problema.

Entonces,

$$d\vec{F} = \vec{E}(z) dq = \vec{E}(z)(\lambda dz) = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right) \hat{k}$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \int_b^{b+L} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right)$$

Después de resolver la integral se tiene que,

$$\vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \left[L + \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{(b+L)^2 + a^2} \right] \hat{k}$$

Propuesto queda revisar el caso en que $b \gg a$ y $b \gg L$. Muy lejos los efectos debieran verse como si se tratase de dos cargas puntuales, considerando la carga total que contienen.

Problema 3

a) Para esta parte se escribirán los campos eléctricos originados por cada carga y con el ppio. de superposición, se obtendrá una expresión para el campo total, en tres dimensiones. Sabemos que los campos eléctricos para cargas puntuales en este caso pueden escribirse como:

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & (1) \\ \vec{E}(r') = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{r}' & (2) \end{cases}$$

Donde (1) corresponde al campo generado por la partícula con carga $-q$, y (2) a aquella con carga $+\frac{q}{2}$. Al pasar el campo a coordenadas cartesianas, y usando el mismo sistema de referencia, centrado en $-q$, para ambos casos, la superposición entrega, (trabajando sólo la magnitud del campo):

$$|\vec{E}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2((x-a)^2 + y^2 + z^2)} - \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

Al evaluar en el eje x , imponemos que $y = z = 0$. Agregando la condición $|\vec{E}| = 0$,

$$\frac{1}{2(x-a)^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2(x-a)^2 \Rightarrow x^2 - 4ax + 2a^2 = 0 \Rightarrow x = a(2 \pm \sqrt{2}) [m]$$

Lo que resuelve el problema. Eso sí, debemos notar que de ambas soluciones sólo una tiene significado físico. Cuando notamos el sentido de los campos eléctricos, vemos que para $0 < x < a$ no puede haber campo eléctrico nulo pues si bien la dirección de ambos vectores lo permitiría, los sentidos no. Puede darse que para $x > a$ o $x < 0$ si se cumpla. Como el campo eléctrico cae con la distancia como $\frac{1}{r^2}$, es razonable esperar que la solución $x = a(2 + \sqrt{2})$ sea la correcta.

b) Queremos probar que existe una superficie equipotencial nula con forma esférica, para lo que planteamos inicialmente el potencial genérico. Así,

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{\|\vec{r} - \vec{r}_k\|}$$

Entonces,

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Es importante notar en ésta expresión que se asume que la referencia es tal que el potencial se anula en el infinito. Esto es no sólo razonable particularmente, sino que se extiende a cualquier distribución finita de cargas. Eso sí, pudiera ser que el potencial fuera nulo en otra(s) posición(es) del espacio, pero aún si ésto sucede, conviene usar lo antes nombrado. De no hacerlo así, la expresión inicial genérica no es válida, pues falta un término constante que dependería de la referencia usada. Por lo anterior, tiene sentido usar ésta expresión para buscar una superficie a potencial cero 'con forma', aún sabiendo que en el infinito existe una, también nula. Imponiendo $V = 0$,

$$2((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4} = \pm ((x-a)^2 + y^2 + z^2)$$

Al resolver, las soluciones quedan:

$$\begin{cases} (x - \frac{4a}{3})^2 + y^2 + z^2 = \frac{4a^2}{9} & (+) \\ (x - \frac{4a}{5})^2 + y^2 + z^2 = -\frac{4a^2}{25} & (-) \end{cases}$$

Con ésto, las coordenadas del centro de la esfera obtenida en (+), (pues (-) no tiene significado físico), son: $(\frac{4a}{3}, 0, 0)$.

c) Para ésta parte, primero se obtiene la carga que debe tener la esfera conductora para alcanzar el campo crítico justo en la vecindad del manto. Con ello, se calculará el potencial. Sabemos que el campo eléctrico tiene la siguiente forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Evaluando, se obtiene la siguiente expresión para despejar Q:

$$\Rightarrow 3 \cdot 10^6 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 0.1^2}$$

El potencial crítico máximo queda:

$$- \int_{\infty}^{0.1} \frac{3 \cdot 10^6 4\pi\epsilon_0 0.01}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot (\hat{r}) dr = 300000 [V]$$

De forma análoga, se resuelve la situación con una esfera conductora de 1 coulomb. Se tendrá, (con el mismo valor antes usado de ϵ_0):

$$3 \cdot 10^6 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow r \simeq 54.73 [m]$$

d) Primero es importante notar que es posible calcular el campo eléctrico en el origen por definición y dicho cálculo es mucho más corto que el presentado a continuación. Queda propuesto, puesto que la solución por éste camino es algo más 'compleja' de obtener, dado que requiere argumentación geométrica más directa. Para obtener el campo eléctrico, se obtendrá primero el potencial eléctrico, y luego se calculará el gradiente con lo que se tendrá lo pedido. Por definición, (con referencia de potencial nulo en el infinito),

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dq(\vec{r}')$$

con la integral definida en éste caso en la superficie del casquete, cargada. $\vec{r}$ representa la(s) posición(es) deseada(s), y $\vec{r}'$ la(s) ubicación(es) de la(s) carga(s). Por conveniencia se centra el casquete en el origen. Como se busca eventualmente tomar gradiente, no tiene sentido calcular el potencial en un punto. Se calculará, en vez, el potencial en todo el eje $\hat{k}$, (en z), y luego se impondrá $z=0$. (La idea de calcular potencial en cierto eje para luego tomar gradiente, imponer cierta(s) condición(es) y finalmente obtener el campo eléctrico deseado es utilizada a menudo). Para escribir el término en el denominador de la fracción dentro de la integral, se observa que:

$$\begin{aligned} \|\vec{r} - \vec{r}'\| &= \|z\hat{k} - r\hat{r}\| = \|z\hat{k} - r\text{sen}\theta\text{cos}\varphi\hat{i} - r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi\hat{j} - r\text{cos}\theta\hat{k}\| \\ &= \sqrt{z^2 - 2zr\text{cos}\theta + r^2} \end{aligned}$$

El casquete esférico queda parametrizado por:

$$\begin{cases} r = R \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

De ésta forma, la expresión queda: (con $dq = \sigma dS$)

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sigma R^2 \text{sen}\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 - 2zR\text{cos}\theta + R^2}} = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\text{sen}\theta d\theta}{\sqrt{z^2 - 2zR\text{cos}\theta + R^2}} = \\ &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[-\frac{2}{-2zR} \sqrt{z^2 - 2zR\text{cos}\theta + R^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left[z + R - \sqrt{z^2 + R^2} \right] \end{aligned}$$

Usando ahora,

$$\vec{E} = -\nabla V$$

se confirma con la ecuación que el campo eléctrico, por simetría, en el eje z depende sólo de z , (y dada la disposición de cargas apunta según $\hat{k}$). Calculando, tenemos:

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \hat{k} \left(\frac{1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}}{z^2} \right)$$

Se desea el campo $\vec{E}(z=0)$, pero la expresión anterior no está bien definida allí. Sin embargo, como al tender z a cero, tanto numerador como denominador caen a cero, es posible utilizar la regla de l'Hopital. Así, (y esto finaliza el problema):

$$\vec{E}(z=0) = \lim_{z \rightarrow 0} \vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \hat{k} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dz} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)}{\frac{d}{dz} (z^2)} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{k} \left[\frac{V}{m} \right]$$