Curso Electromagnetismo FI2002

Pregunta 2 control 3 semestre 2010/1

Solución

Como la partícula parte desde el orígen y en reposo las condiciones iniciales que deben satisfacer las soluciones son:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0 \\ y(t=0) &= 0 \\ z(t=0) &= 0 \\ v_x(t=0) &= 0 \\ v_y(t=0) &= 0 \\ v_z(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

Según el enunciado, los campos que experimenta la partícula de masa m y carga q son:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \cos(\Omega t)\hat{z} \\ \vec{B} &= B_0 \hat{x} \end{aligned}$$

Entonces la fuerza que experimentará dicha partícula es la de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(E_0 \cos(\Omega t)\hat{z} + \vec{v} \times B_0 \hat{x}) = m\vec{a}$$

Debido a esto el sistema de ecuaciones que se debe resolver - por componentes - es el siguiente (1 punto):

$$\begin{aligned} m\dot{v_x} &= 0 \\ m\dot{v_y} &= qB_0 v_z \\ m\dot{v_z} &= -qB_0 v_y + qE_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

De la primera ecuación se desprende que (1 punto) $v_x(t) = 0 \wedge x(t) = 0$ De aquí la idea es resolver las dos últimas ecuaciones transformándolas en una de segundo grado. Escogemos resolver para v_y:

$$\ddot{v_y} + \underbrace{\frac{q^2 B_0^2}{m^2}}_{\omega^2} v_y = \underbrace{\frac{q^2 B_0 E_0}{m^2}}_{\alpha} \cos \Omega t \quad \text{(2 puntos)}$$

Esta última ecuación tiene su equivalente para v_z.

La solución a este sistema es (1 punto):

$$
\begin{aligned}
v_y(t) &= \frac{\alpha}{\omega^2 - \Omega^2}(\cos \Omega t - \cos \omega t) \\
v_z(t) &= \frac{\alpha}{\omega^2 - \Omega^2}(\sin \omega t - \frac{\Omega}{\omega} \sin \Omega t) \\
y(t) &= \frac{\alpha}{\omega^2 - \Omega^2}(\frac{\sin \Omega t}{\Omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega}) \\
z(t) &= \frac{\alpha}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega)}(\cos \Omega t - \cos \omega t)
\end{aligned}
$$

Por último si la frecuencia del sistema ω es igual a la del campo eléctrico Ω, el sistema entra en resonancia. Para esto se debe modificar y resolver la ecuación diferencial de segundo orden:

$$
\ddot{v_y} + \Omega^2 v_y = \alpha \cos \Omega t
$$

cuya solución es (1 punto):

$$
\begin{aligned}
v_z(t) &= \frac{\alpha}{2}(\sin(\Omega t) + t\Omega \cos(\Omega t)) \\
v_y(t) &= \frac{\alpha}{2\Omega} t \sin(\Omega t)
\end{aligned}
$$

de donde se desprende que el sistema efectivamente entra en resonancia - la velocidad de la partícula crece linealmente con el tiempo.