Solución P4 Control 3 Otoño 2010

Para la parte (a) usamos que:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

Integrando y aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_{\Gamma(S)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{2}$$

Consideremos el circuito Γ como una circunferencia de radio r y se tiene que $d\vec{l} = rd\theta$ De manera que:

$$\int_{\Gamma(S)} \vec{E} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} E_\theta r d\theta = 2\pi r E_\theta \tag{3}$$

Y por otro lado:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial B(t)}{\partial t} \int_S dS = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \tag{4}$$

Igualando obtenemos que:

$$E_\theta = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \tag{5}$$

Para la parte (b) notamos que la fuerza sobre un segmento del circulo de radio a es

$$dF_\theta = dq \cdot E_\theta = \underbrace{\frac{nq}{2\pi a}}_{dq/dl} \underbrace{a d\theta}_{dl} E_\theta \underbrace{(a,t)}_{ojo!}$$

Luego el torque en la dirección axial $\hat{z}$ ejercido por esta fuerza es:

$$\tau_z = \int_0^{2\pi} a \frac{nq}{2\pi a} a d\theta E_\theta = nqaE_\theta(a,t) = -nq\frac{a^2}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = I\alpha \tag{6}$$

si definimos la velocidad angular en el sentido horario como ω entonces:

$$nq\frac{a^2}{2I} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \tag{7}$$

Integrando en el tiempo entre 0 y t^* en el cual B(t) alcanza el valor B:

$$nq\frac{a^2}{2I} (\underbrace{B(t^*)}_{B} - \underbrace{B(0)}_{0}) = \underbrace{\omega(t^*)}_{\omega} - \underbrace{\omega(0)}_{0} \tag{8}$$

$$\omega = \frac{Bnqa^2}{2I} \tag{9}$$