Problema:

Esfera de radio r, cargada uniformemente con densidad (volumétrica) de carga ρ. Calcular el campo eléctrico sin usar la Ley de Gauss.

Solución:

$$\text{Campo Eléctrico: } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r})\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

$$\text{Potencial electrostático: } \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

En primer lugar escogemos un buen sistema de referencia, con su origen en el centro de la esfera. Por simplicidad calcularemos el potencial (para derivarlo después), y solamente en el eje z para z positivo; ergo, $\vec{r} = z\hat{z}$, que por la geometría del problema es fácil extender a $\vec{r} = r\hat{r}$. Entonces:

$\vec{r} = z\hat{z}$

(Integramos en coordenadas esféricas)

$\vec{r}' = \sin(\theta')\cos(\phi')\,\hat{x} + \sin(\theta')\sin(\phi')\,\hat{y} + \cos(\theta')\,\hat{z} = r'\hat{r}(\theta',\phi'),\quad \theta' \in [0,\pi], \phi' \in [0,2\pi]$

$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2 + |\vec{r}'|^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r} = z^2 + r'^2 - 2zr'\cos(\theta')$

$dV' = r'^2\sin(\theta')\ dr'd\theta'd\phi'$

$$\varphi(z\hat{z}) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{r'^2\sin(\theta')}{\sqrt{z^2+r'^2-2zr'\cos(\theta')}}\,d\phi'd\theta'dr' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^\pi\frac{r'^2\sin(\theta')}{\sqrt{z^2+r'^2-2zr'\cos(\theta')}}\,d\theta'dr'$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'}{z}\sqrt{z^2+r'^2-2zr'\cos(\theta')}\Bigg|_0^\pi dr' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'}{z}\left(\sqrt{z^2+r'^2+2zr'}-\sqrt{z^2+r'^2-2zr'}\right)dr'$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0 z}\left(\int_0^R r'|z+r'|\ \ dr' - \int_0^R r'|z-r'|\ \ dr'\right)$$

Tenemos dos cuadrados de binomio dentro de las raíces. Recordar que en general $\sqrt{x^2} = |x|$. Como r' es positivo y asumimos que z es positivo, entonces $|z+r'| = z+r'$.

$$\int_0^R r'(z+r')\ \ dr' = \frac{zR^2}{2}+\frac{R^3}{3}$$

A partir de ahora, hay que ponerse en casos según z sea mayor o menor que el radio de la esfera (Es decir, si estamos midiendo el potencial fuera o dentro de ella):

●Caso $z > R$: Obviamente $|z - r'| = z - r'$ para todo $r' \in [0, R]$:

$$\int_0^R r'(z - r')\ dr' = \frac{zR^2}{2} - \frac{R^3}{3} \Longrightarrow \quad \varphi(z\hat{z}) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 z}$$

●Caso $0 < z < R$: En este caso, el valor de $|z - r'|$ depende de si r' está entre 0 y z, ó entre z y R. Luego de hacer un poco de álgebra se encuentra:

$$\int_0^R r'|z - r'|\ dr' = \int_0^z r'(z - r')\,dr' - \int_z^R r'(z - r')\ dr' = \frac{z^3}{3} - \frac{zR^2}{2} + \frac{R^3}{3} \Longrightarrow \quad \varphi(z\hat{z}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{z^2}{3} + R^2\right)$$

Aprovechando la simetría esférica del problema extendemos los resultados para $\vec{r} = r\hat{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(-\dfrac{r^2}{3} + R^2\right) & r \leq R \\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r \geq R \end{cases}$$

Recordando que $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\dfrac{d\varphi}{dr}\hat{r}$ (Esto último pues φ depende sólo de r):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r\hat{r} & r \leq R \\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & r \geq R \end{cases}$$

Se concluye que el cuerpo esférico exhibe el mismo campo y potencial que una partícula puntual; salvo en su interior, donde el campo eléctrico crece linealmente con la distancia al centro. Nótese además que tanto el campo eléctrico como el potencial electrostático son funciones continuas.