Auxiliar oscilaciones

Oscilaciones Amortiguados - Forzadas

Supongamos un cuerpo de masa m en prescencia de:

i.- Una fuerza restitutiva con constante elastica k

ii.- Roce viscoso lineal con constante η

iii.- Una fuerza arbitraria $F(t)$

$\Rightarrow$ La segunda ley de Newton es:

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + F(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

Resolveremos, de manera general la ecuacion

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = F(t)$$

La solucion posee:

i- Una parte homogenea (sol de $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$) de la forma $A x_1(t) + B x_2(t)$. Donde A y B son constantes de integración.

ii.- Una parte particular que depende profundamente de $F(t)$. Usaré variacion de parametros para calcularla, aunque para algunas formas de $F(t)$, como funciones trigonometricas, exponenciales o polinomios (o mezclas), es mas util el método de coeficientes indeterminados. Para los detalles vean su curso de EDO favorito.

Sol homogenea:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0$$

Tiene polinomio caracteristico

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}$$

Existen 3 casos

$\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ $\Big\langle$
- $\lambda_+ \neq \lambda_- \Rightarrow x_h(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}$
- $\lambda_+ = \lambda_- \Rightarrow x_h(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}$

$\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Def: $\eta = Re(\lambda_+)$, $\xi = Im(\lambda_+)$

$$\Rightarrow x_h = Ae^{\eta t}\sin\xi t + Be^{-\eta t}\cos\xi t$$

Sea un modo con valor caracteristico λ

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Big\langle$
- $\lambda > 0 \Rightarrow$ Solucion exponencial divergente
- $\lambda < 0 \Rightarrow$ Solucion exponencial amortiguada

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Big\langle$
- $\eta > 0 \Rightarrow$ Solucion oscilatoria divergente
- $\eta < 0 =$ Solucion oscilatoria amortiguada

Solucion particular: El metodo de variación de parametros consiste en asumir que las constantes A y B son funciones de t. Esto lleva a EDOs para A y B. Al resolverlas uno llega a que

$$x_p = -x_1(t)\int \frac{F(t)\, x_2(t)}{W(x_1, x_2)}\, dt + x_2(t)\int \frac{F(t)\, x_1(t)}{W(x_1, x_2)}\, dt$$

Donde x_1 y x_2 son los terminos de la solucion homogenea y $W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}$ es el Wronskiano del sistema

P2| En ausencia de gravedad, un resorte de largo natural 0 y constante k descanza verticalmente sobre una superficie. En el otro extremo se ubica una partícula de masa m. En cierto instante la mesa empieza a oscilar de manera que $h(t) = A\cos\Omega t$

$$m\ddot{x} = -(x + h(t))k$$

$$\ddot{x} + w^2 x = -w^2 A\cos\Omega t$$

$$\lambda = \pm iw \Rightarrow x_h(t) = \alpha\sin wt + \beta\cos wt$$

Usando coeficientes indeterminados proponemos

$$x_p(t) = B\cos wt \Rightarrow -B\Omega^2\cancel{\cos wt} + w^2\cancel{\cos wt} = -w^2 A\cancel{\cos wt}$$

$$\Rightarrow B = \frac{Aw^2}{\Omega^2 - w^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \alpha\sin wt + \left(\beta + \frac{Aw^2}{\Omega^2 - w^2}\right)\cos wt$$

Ojo que si $\Omega \to w \Rightarrow x(t) \to \infty$

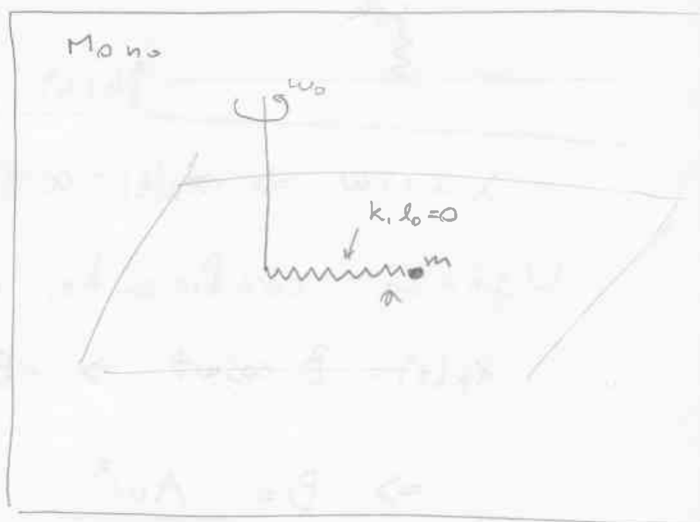
Por otro lado si $\Omega = w \Rightarrow x(t)$ se intefine. Esto es porque se debe diferenciar este caso en el metodo de coef indeterminados (Ω valor caracteristico)

Pueden demostrar que

$x_p(t) = \frac{Awt}{2}\sin wt \rightarrow$ es la solucion cuando $\Omega = w$

P1] Sea una argolla de masa m que desliza por un tubo horizontal que rota con velocidad angular ω_0 respecto a uno de sus extremos. Entre este extremo y la argolla hay un resorte de constante elastica k. Además existe roce viscoso lineal caracterizado por una constante η. Para distintos valores de ω_0, caracterice los tipos de soluciones

$$\Rightarrow m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho}+(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}+\ddot{z}\hat{k}\right)=(-k\rho-\eta\dot{\rho})\hat{\rho}+\text{otros}$$



Tomando la ecuacion en $\hat{\rho}$

$$\ddot{\rho}+\underbrace{\left(\frac{k}{m}-\omega_0^2\right)}_{\beta}\rho+\underbrace{\frac{\eta}{m}}_{\alpha}\dot{\rho}=0$$

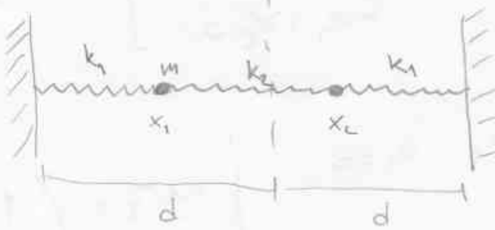
$$\Rightarrow \lambda_{\pm}=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}$$

Casos:

$\omega_0^2>4\frac{k}{m}-\frac{\eta^2}{m^2} \Rightarrow$ Soluciones exponenciales: $\omega_0^2<\frac{k}{m}\Rightarrow$ Decaen; $\omega_0^2>\frac{k}{m}\Rightarrow$ Divergen

$\omega_0^2<4\frac{k}{m}-\frac{\eta^2}{m^2}\Rightarrow$ Soluciones oscilatorias $\rightarrow$ Siempre decaen ya que $\eta>0$

Oscilaciones acopladas



No hay gravedad
Todos los resortes tienen largo natural 0.

Ecs mov

$$m\ddot{x}_1 = -k_1(x_1-d) + k_2(x_2-x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = k_1(d-x_2) - k_2(x_2-x_1)$$

Haciendo CV
$$\eta_1 = x_1 - d$$
$$\eta_2 = x_2 - d$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\eta}_1 = -\omega_1^2\eta_1 + \omega_2^2(\eta_2-\eta_1)$$
$$\ddot{\eta}_2 = -\omega_1^2\eta_2 - \omega_2^2(\eta_2-\eta_1)$$

Con $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}$
$\omega_2^2 = \frac{k_2}{m}$

En notación matricial

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}^{\cdot\cdot} = -\begin{pmatrix}\omega_1^2+\omega_2^2 & -\omega_2^2\\ -\omega_2^2 & \omega_1^2+\omega_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

$\downarrow$ Diagonalizamos

$$\begin{vmatrix}\omega_1^2+\omega_2^2-\lambda & -\omega_2^2\\ -\omega_1^2 & \omega_1^2+\omega_2^2-\lambda\end{vmatrix} = (\omega_1^2+\omega_2^2-\lambda)^2 - \omega_2^4 = (\omega_1^2-\lambda)(\omega_1^2+2\omega_2^2-\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \omega_1^2 \qquad \lambda_2 = \omega_1 + 2\omega_2^2$$

$\Rightarrow$ Es diagonalizable

$$\begin{pmatrix} \cancel{\omega_1^2}+\omega_2^2-\cancel{\omega_1^2} & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \cancel{\omega_1^2}+\omega_2^2-\cancel{\omega_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}\right| \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x_1 - x_2 = 0 \quad \Big| \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M = P^T D P \Rightarrow \ddot{\vec{\eta}} = P^T D P \vec{\eta} \Rightarrow (P\vec{\eta})^{\cdot\cdot} = D (P\vec{\eta})$$

$$\Rightarrow (\eta_1 + \eta_2)^{\cdot\cdot} = -\omega_1^2 (\eta_1 + \eta_2)$$

$$(\eta_1 - \eta_2)^{\cdot\cdot} = -(\omega_1^2 + 2\omega_2^2)(\eta_1 - \eta_2)$$

$$\xi_1 = \eta_1 + \eta_2 \qquad \xi_2 = \eta_1 - \eta_2$$

$$\left.\begin{matrix} \ddot{\xi}_1 = -\omega_1^2 \xi_1 \\ \ddot{\xi}_2 = -(\omega_1^2 + 2\omega_2^2)\xi_2 \end{matrix}\right\} \text{ Osciladores}$$

Interpretacion:

La solucion se compone de dos modos:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ x_1 y x_2 se mueven coordinadamente por lo que k_2 nunca se comprime. Esto es consistente con $\omega^2 = \omega_1^2$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ x_1 y x_2 se mueven en contrafase. Con la misma rapidez y direccion opuesta. $\omega^2 = 2\omega_1^2 + \omega_2^2$.

Obviamente la solucion general es una combinacion lineal de ambos modos