Mecanica
Oscilaciones

Dado un sistema caracterizado por una energia E

$$E = K + V$$

Expandiendo V en una serie de Taylor en torno a x_0

$$V(x) = \cancel{V(x_0)} + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \Theta((x - x_0)^3)$$

Cte: Se puede borrar de la energia

Supongamos x_0 un maximo o minimo de $V \Rightarrow V'(x_0) = 0$

Además definimos $\epsilon = x - x_0$ y descartamos terminos $\Theta(\epsilon^3)$

$$\Rightarrow V(\epsilon) = \frac{V''}{2}(x_0)\,\epsilon^2$$

Por otro lado, si $K = \frac{\alpha}{2}\dot{\epsilon}^2$ con α constante

$$\Rightarrow E = \frac{\alpha}{2}\dot{\epsilon}^2 + \frac{V''(x_0)}{2}\epsilon^2 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \alpha \cancel{\dot{\epsilon}}\ddot{\epsilon} + V''(x_0)\,\epsilon\cancel{\dot{\epsilon}} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\epsilon} = \underbrace{\frac{V''(x_0)}{\alpha}}_{\equiv \omega^2}\epsilon \quad \Rightarrow \quad \ddot{\epsilon} = -\omega^2 \epsilon \quad (1)$$

Si $\omega^2 > 0$ (ie $V''(x_0) > 0$) $\Rightarrow$ (1) es un oscilador armonico con solucion $\epsilon(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ $\therefore$ x_0 es estable

Si $\omega^2 < 0$ (ie $V''(x_0) < 0$) $\Rightarrow$ (1) tiene solucion divergente

$\epsilon(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ $\therefore$ x_0 es inestable.

En resumen Para trabajar un problema de pequeñas oscilaciones se trabaja como sigue

1.- Determinar la energía E del sistema

2.- Escribir $E = k + V$ con $k = \frac{1}{2}\underset{\downarrow}{\alpha}\dot{x}^2$

se busca determinar α

3.- Buscar los puntos de equilibrio $x_i \,/\, V'(x_i) = 0$

4.- Determinar si x_i es punto de equilibrio estable o inestable

$$x_i \begin{cases} \text{es estable si } V''(x_i) > 0 \\ \text{es inestable si } V''(x_i) < 0 \end{cases}$$

5.- Para los puntos estables determinar la frecuencia de pequeñas oscilaciones

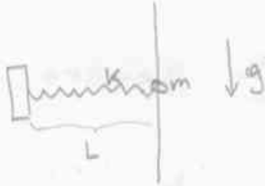
$$\omega_i^2 = \frac{V''(x_i)}{\alpha}$$

Ojo: Cada punto posee una frecuencia, en principio, diferente.

Por otro lado si α depende de x entonces solo en primera aproximación se cumple que

$$\omega^2 \sim \frac{V''(x_0)}{\alpha(x_0)}$$

Aceituno. E 8



Siguiendo el procedimiento presentado

1.- $E = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k \left(z^2 + \cancel{L^2} \right) + mgz$

cte se puede eliminar

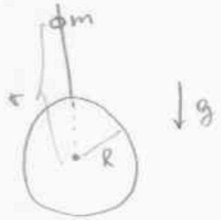
2.- $E = k + V \Rightarrow k = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \Rightarrow m = \alpha$

3.- $V' = \left(\frac{1}{2} k z^2 + mgz \right)' = k z_c + mg = 0 \Rightarrow z_c = \frac{mg}{k}$

4.- $V''(z_c) = k > 0 \Rightarrow z_c$ es estable

5.- $\omega^2 = \frac{V''(z_c)}{\alpha} = \frac{k}{m}$

Aceituno E7



a) Vemos que $V_e = \frac{k}{r}$ genera

$$F = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k}{r}\right) = \frac{k}{r^2}$$

$$\Rightarrow V_e = \frac{k}{r}$$

b)

1.- $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + mgr + \frac{k}{r}$

2.- $k = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \Rightarrow \alpha = m$

3.- $V'(r_c) = mg - \frac{k}{r_c^2} = 0 \Rightarrow r_c = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

4.- $V''(r_c) = \frac{2k}{r_c^3} > 0 \Rightarrow$ Es equilibrio estable

5.- $\omega^2 = \frac{2k}{r_c^3 m}$

c) Imponemos $\dot{r}(R) = 0$

$$\Rightarrow E = mgR + \frac{k}{R}$$

y buscamos r_0 tq $\dot{r}(r_0) = 0$

$$\Rightarrow mgr_0 + \frac{k}{r_0} = E = mgR + \frac{k}{R} \Rightarrow mg r_0^2 - \left(mgR + \frac{k}{R}\right) r_0 + k = 0$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{mgR + \frac{k}{R} \pm \sqrt{\left(mgR + \frac{k}{R}\right)^2 - 4mgk}}{2mg}$$

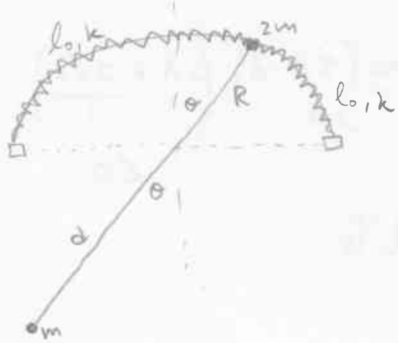
$$\sqrt{} = (mgR)^2 + 2mgk + \left(\frac{k}{R}\right)^2 - 4\cancel{m}gk = \left(mgR - \frac{k}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{mgR + \frac{k}{R} \pm \left(mgR - \frac{k}{R}\right)}{2mg}$$

$$r_{0+} = \frac{\cancel{mg}R + \cancel{\frac{k}{R}} + \cancel{mg}R - \cancel{\frac{k}{R}}}{2\cancel{mg}} = R \rightarrow \text{Condicion que impusimos nosotros}$$

$$r_{0-} = \frac{\cancel{mg}R + \frac{k}{R} - \cancel{mg}R + \frac{k}{R}}{2mg} = \boxed{\frac{k}{Rmg} = r_0}$$

Kim P.4.4



$l_0 = R$

$k = \dfrac{\sqrt{2}\, mg}{\pi R^2}(2R-d)$

Ojo $2R > d$ si no $k < 0$

a) 1.- $E = K + V$

$$K = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\theta}^2 + m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$V_{grav} = 2mgR\cos\theta - mgd\cos\theta = mg\cos\theta(2R-d)$$

$$V_{elas} = \frac{1}{2}k\left(R - \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)R\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(R - R\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}kR^2\left[\left(\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\theta\right)^2 + \left(\left(1-\frac{\pi}{2}\right)-\theta\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}kR^2\left[\underbrace{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)^2}_{cte} + 2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\theta + \theta^2 + \underbrace{\left(1-\frac{\pi}{2}\right)^2}_{cte} - 2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\theta + \theta^2\right]$$

$$= kR^2\theta^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\theta}^2 + m R^2 \dot{\theta}^2 + mg\cos\theta(2R-d) + kR^2\theta^2$$

2.- $K = \frac{1}{2} m(2R^2+d^2)\dot{\theta}^2 \Rightarrow \alpha = m(2R^2+d^2)$

3.- $V = mg\cos\theta(2R-d) + \dfrac{\sqrt{2}\, mg}{\pi \cancel{R^2}}(2R-d)\cancel{R^2}\theta^2 = mg(2R-d)\left[\cos\theta + \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\theta^2\right]$

$V'(\theta_c) = 0 \Rightarrow \cancel{mg(2R-d)}\left[-\sin\theta_c + \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2\cdot\theta_c}{\pi}\right] = 0 \Rightarrow \sin\theta_c = \dfrac{2\sqrt{2}\,\theta_c}{\pi}$

Que tiene soluciones: $\begin{cases} 0 \\ \pi/4 \\ -\pi/4 \end{cases}$

4.- Estabilidad $\theta_c = 0$

$$V''(\theta_c) = mg(2R-d)\left(-\cos\theta_c + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) = \underbrace{mg(2R-d)}_{>0}\underbrace{\left(-1+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)}_{<0} < 0$$

$\Rightarrow$ $\theta = 0$ es punto crítico inestable

Estabilidad $\theta_c = \frac{\pi}{4}$

$$V''(\theta_c) = mg(2R-d)\left(\cos\frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) = \underbrace{mg(2R-d)}_{>0}\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)}_{>0} > 0$$

Ojo como $\cos\theta$ es par el caso de $\theta = -\frac{\pi}{4}$ es analogo

$\Rightarrow$ $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ son puntos críticos estables

5.- $$\omega^2 = \frac{V''(\theta_c)}{\alpha} = \frac{\cancel{m}g(2R-d)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)}{\cancel{m}(2R^2+d^2)}$$