Pauta P1 Control 2

a) A partir del DCL, para un caso general se tiene las siguientes ecuaciones:

$$\hat{x}\rfloor \; -k\Delta\sin\theta + f_r = m\ddot{x}$$
$$\hat{y}\rfloor \; N + k\Delta\cos\theta - mg = m\ddot{y}$$

Y como además se tiene la ecuación para el roce: $f_r = \mu N$ en donde se ha considerado roce cinético.

Imponemos que en el eje y no se mueva, es decir $\ddot{y} = 0$, con esto se obtiene

$$N = mg - k\Delta\cos\theta$$

Una vez obtenida la normal, se quiere imponer que la partícula no se despegue, lo que quiere decir que se debe imponer que $N \geq 0$, de lo cual la condición para que la masa no se despegue queda expresada como:

$$mg - k\Delta\cos\theta \geq 0$$

De la figura de la situación inicial se puede calcular $\Delta = l_0(\sqrt{2}-1)$ y $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, luego

$$mg - kl_0(\sqrt{2}-1)\frac{1}{\sqrt{2}} \geq 0$$
$$\boxed{\frac{mg}{kl_0} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) Ahora se ocupan las mismas ecuaciones deducidas anteriormente del DCL, resultando:

$$-k\Delta\sin\theta + \mu(mg - k\Delta\cos\theta) = m\ddot{x}$$

Y usando

$$\Delta = \sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0$$
$$\cos\theta = \frac{l_0}{l_0 + \Delta}$$
$$\sin\theta = \frac{x}{l_0 + \Delta}$$

La ecuación resultante es:

$$-k(\sqrt{l_0^2+x^2}-l_0)\frac{x}{\sqrt{l_0^2+x^2}}+\mu mg-\mu k(\sqrt{l_0^2+x^2}-l_0)\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2+x^2}}=m\ddot{x}$$

$$\boxed{-kx+\frac{kl_0x}{\sqrt{l_0^2+x^2}}+\mu mg-\mu kl_0+\frac{\mu kl_0^2}{\sqrt{l_0^2+x^2}}=m\ddot{x}}$$

c) Para resolver esta parte hay dos opciones:

Opción 1:

Resolver la ecuación anterior…

$$\mu(mg-kl_0)dx-kxdx+\frac{kl_0xdx}{\sqrt{l_0^2+x^2}}+\frac{\mu kl_0^2dx}{\sqrt{l_0^2+x^2}}=m\dot{x}d\dot{x}$$

$$\mu(mg-kl_0)x\Big|_{l_0}^{-l_0/2}-k\frac{x^2}{2}\Big|_{l_0}^{-l_0/2}+kl_0\sqrt{l_0^2+x^2}\Big|_{l_0}^{-l_0/2}+\frac{\mu kl_0^2dx}{l_0\sqrt{1+\left(x/l_0\right)^2}}=m\frac{\dot{x}^2}{2}\Big|_0^0$$

$$\mu(mg-kl_0)x\Big|_{l_0}^{-l_0/2}-k\frac{x^2}{2}\Big|_{l_0}^{-l_0/2}+kl_0\sqrt{l_0^2+x^2}\Big|_{l_0}^{-l_0/2}+\frac{\mu kl_0^2(dx/l_0)}{\sqrt{1+\left(x/l_0\right)^2}}=m\frac{\dot{x}^2}{2}\Big|_0^0$$

$$\mu(mg-kl_0)x\Big|_{l_0}^{-l_0/2}-k\frac{x^2}{2}\Big|_{l_0}^{-l_0/2}+kl_0\sqrt{l_0^2+x^2}\Big|_{l_0}^{-l_0/2}+\mu kl_0^2\operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{l_0}\right)\Big|_{l_0}^{-l_0/2}=m\frac{\dot{x}^2}{2}\Big|_0^0$$

$$\mu(mg-kl_0)\left(-\frac{l_0}{2}-l_0\right)-\frac{k}{2}\left(\frac{l_0^2}{4}-l_0^2\right)+kl_0\left(\sqrt{l_0^2+\frac{l_0^2}{4}}-\sqrt{l_0^2+l_0^2}\right)$$
$$+\mu kl_0^2\left(\operatorname{arcsinh}\left(-\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arcsinh}\left(1\right)\right)=0$$

Finalmente, de esta ecuación se calcula el coeficiente de roce:

$$\boxed{\mu = \frac{\frac{3}{8}kl_0^2 + kl_0^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2}\right)}{\frac{3}{2}l_0(mg - kl_0) - kl_0^2\left(\operatorname{arcsinh}(-1/2) - \operatorname{arcsinh}(1)\right)}}$$

Opción 2:

Con trabajo y energía…

$$W = \int \overrightarrow{f_r} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{l_0}^{-l_0/2} \mu(mg - k\Delta\cos\theta)\hat{x}dx\hat{x} = \Delta E$$

Luego:

$$\Delta E = \int_{l_0}^{-l_0/2} \mu mg dx - \int_{l_0}^{-l_0/2} \mu k\Delta\cos\theta dx$$

Ojo! Las integrales ya se calcularon en la opción 1, ahora es necesario calcular la diferencia de energías. En este caso, por el hecho de que en ambos puntos el bloque se encuentra quieto, la única energía presente será la potencial elástica, para lo cual se necesita la elongación inicial y la final.

$$\Delta E = U_{ef} - U_{ei} = \frac{k\delta_f^2}{2} - \frac{k\delta_i^2}{2} = \frac{k(\delta_f^2 - \delta_i^2)}{2}$$

Y las elongaciones se ocupan usando Pitágoras para ambos momentos.

$$\delta_f = l_0\sqrt{\frac{5}{4}} - l_0$$

$$\delta_i = l_0\sqrt{2} - l_0$$

Reemplazando esto:

$$\Delta E = \frac{kl_0^2}{2}\left(\frac{5}{4} - 2\sqrt{\frac{5}{4}} + 1 - 2 + 2\sqrt{2} + 1\right)$$

$$\Delta E = \frac{kl_0^2}{2}\left(-\frac{3}{4} - \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right)$$

Con todo esto, se llega al mismo resultado que la opción 1