Pauta Problema 3, Control 2

Parte (a)

Llamaremos ρ a la distancia entre el agujero (que llamaremos O) y la partícula que está sobre el plano, z_1 a la distancia entre O y la partícula más cercana de las dos que cuelgan, y z_2 a la distancia entre O y la más lejana (z_1, $z_2 \geq 0$).

Debemos determinar el radio de la órbita circunferencial, es decir, determinar la distancia ρ_c, para la situación en que ρ es constante. Para esto, escribimos la energía del sistema, situando el nivel de energía potencial gravitatoria nula en el plano horizontal. Usamos coordenadas cilíndricas.

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}m\dot{z_1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z_2}^2 - mgz_1 - mgz_2$$

notemos que la distancia entre z_1 y z_2 se puede considerar constante (suponemos que la cuerda está siempre tensa), de modo que

$$\rho + z_1 = cte$$

$$\rho + z_2 = cte$$

por tanto

$$\dot{z_1} = \dot{z_2} = -\dot{\rho}$$

Luego, la expresión para la energía queda

$$E = \frac{3}{2}m\dot{\rho} + \frac{m\rho^2\dot{\phi}^2}{2} - mgz$$

donde z es la suma de z_1 y z_2.

Ahora, por definición, la magnitud del momento angular, l, es

$$l = m\rho^2\dot{\phi}$$

de modo que

$$\dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{m^2\rho^4}$$

y la energía queda, ahora en en función de l,

$$E = \frac{3}{2}m\dot{\rho} + \frac{l^2}{2m\rho^2} - mgz$$

Puesto que $\rho + z_1 = cte$ y $\rho + z_2 = cte$, se tiene que

$$2\rho + z = cte$$

por lo que podemos escribir la energía como

$$E = \frac{3}{2}m\dot{\rho} + \frac{l^2}{2m\rho^2} - mg(C - 2\rho)$$

El potencial efectivo asociado

$$U* = \frac{l^2}{2m\rho^2} - mg(C - 2\rho)$$

Sabemos que la órbita circunferencial cumple con la condición $U*' = 0$. Al derivar nuestra expresión para $U*$ con respecto a ρ, obtenemos

$$\frac{dU*}{d\rho} = -\frac{l^2}{m\rho^3} + 2mg$$

Imponiendo que se anule

$$\Rightarrow \rho_c = \left\{\frac{l^2}{2m^2g}\right\}^{1/3}$$

`(2ptos.)`

Parte (b)

La frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a la órbita circunferencial es

$$\Omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{U*''(\rho_c)}{3m}}$$

puesto que el factor que acompaña a $\frac{1}{2}\dot{\rho}$ es $3m$. La segunda derivada del potencial efectivo respecto a ρ es

$$\frac{d^2U*}{d\rho^2} = \frac{3l^2}{m\rho^4}$$

que evaluado en ρ_c es

$$\frac{d^2U*}{d\rho^2}(\rho_c) = \frac{3m^{5/3}g^{4/3}2^{4/3}}{l^{2/3}}$$

Por lo tanto

$$\Omega_{p.o.} = \left\{\frac{4mg^2}{l}\right\}^{1/3}$$

`(2ptos.)`

Parte (c)

Si se corta la cuerda y deja de existir la partícula de más abajo, la energía es, de entonces en adelante

$$E = m\dot{\rho}^2 + \frac{l^2}{2m\rho^2} - mgz_1$$

Por otro lado le energía justo después que se corta la cuerda es

$$E = E_{circ.} - (-mgz_{2c})$$

donde E_{circ} es la energía de la órbita circunferencial y z_{2c} es el valor de z_2 en la órbita circuenferencial. Pero la energía de la órbita circunferencial es

$$E_{circ} = \frac{l^2}{2m\rho_c^2} - mgz_c$$

donde z_c es el valor de z en la órbita circunferencial. Luego

$$E = \frac{l^2}{2m\rho_c^2} - mg(C - 2\rho_c) + mgz_{2c}$$

$$= \frac{l^2}{2m\rho_c^2} - mg(C - 2\rho_c) + mg(D - \rho_c)$$

donde C y D son constantes. Reagrupando

$$E = \frac{l^2}{2m\rho_c^2} - mgA + mg\rho_c$$

donde A es $D - C$, y notemos que $A = \rho_c - z_{1c} = \rho - z_1$.

Ahora, usamos que, entre el instante justo después que la cuerda se corta, y cualquier instante posterior, la energía se conserva, por tanto

$$m\dot{\rho}^2 + \frac{l^2}{2m\rho^2} - mgz_1 = \frac{l^2}{2m\rho_c^2} + mg\rho_c - mg(\rho - z_1)$$

$$\Leftrightarrow m\dot{\rho}^2 + \frac{l^2}{2m}\left\{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_c^2}\right\} = mg(\rho_c - \rho)$$

En los instantes en que se alcanzan los extremos, es decir, cuando ρ es mínimo o máximo, la velocidad $\dot{\rho}$ es nula, imponiendo lo cual se obtiene una ecuación cúbica para ρ_{max}

$$\rho_{max}^3(mg) + \rho_{max}^2\left\{-\frac{l^2}{2m\rho_c^2} - mg\rho_c^2\right\} + \frac{l^2}{2m} = 0$$

A simple vista, una solución para esta ecuación es $\rho_{max} = \rho_c$, que representa el extremo mínimo de la trayectoria. De entre las otras dos soluciones, una de ellas representa el extremo máximo de la trayectoria.

(2ptos.)

Paulina Cecchi