Pauta Problema 3, Control 1

Parte (a)

Usaremos coordenadas cilíndricas. En esta base, las fuerzas actuando sobre la masa m son:

$$\vec{F} = -T\cos\alpha\hat{\rho} - \mu N\hat{\phi} + (N + T\operatorname{sen}\alpha - mg)\hat{k}$$

`(1 pto.)`

Las ecuaciones escalares que se derivan, imponiendo que la masa no se levanta del suelo ni cambia su distancia respecto al centro de la circunferencia, son, en $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{k}$, respectivamente:

$$-T\cos\alpha = -mR\cos\alpha\dot{\phi}^2$$

$$-\mu N = mR\cos\alpha\ddot{\phi}$$

$$N = mg - T\operatorname{sen}\alpha$$

Parte (b)

El torque respecto al centro de la circunferencia es

$$\vec{\tau_0} = \vec{r}\times\vec{F} = R\cos\alpha\hat{\rho}\times(-\mu N\hat{\phi}+(N+T\operatorname{sen}\alpha-mg)\hat{k})$$

$$= -\mu NR\cos\alpha\hat{k} - R\cos\alpha(N + T\operatorname{sen}\alpha - mg)\hat{\phi}$$

Por otro lado, el momento angular es

$$\vec{l_0} = \vec{r}\times m\vec{v} = R\cos\alpha\hat{\rho}\times mR\cos\alpha\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$= R^2\cos^2\alpha m\dot{\phi}\hat{k}$$

La ecuación de torque

$$\frac{d\vec{l_0}}{dt} = \vec{\tau_0}$$

implica que $N = mg - T\operatorname{sen}\alpha$, y que $-\mu N = mR\cos\alpha\ddot{\phi}$, dos cosas que ya sabíamos de las ecuaciones de movimiento.

`(1 pto.)`

Parte (c)

Debemos relacionar $\dot{\phi}$ con N. De la ecuación escalar en $\hat{\rho}$, tenemos que

$$T = mR\omega^2$$

donde hemos llamado ω a $\dot{\phi}$. Introduciendo este resultado en la ecuación escalar en $\hat{k}$, obtenemos

$$N = mg - mR\omega^2\operatorname{sen}\alpha$$

En el instante inicial, entonces, se tiene,

$$\omega_0^2 = \frac{mg - N(0)}{mR\operatorname{sen}\alpha}$$

Exigiendo que la normal sea a lo sumo nula, obtenemos la velocidad angular inicial máxima

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{R\operatorname{sen}\alpha}}$$

`(2 ptos.)`

Parte (d)

Si la rapidez inicial es un medio de la necesaria para producir el despegue, como el radio de la circunferencia es constante, se cumple que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4R\operatorname{sen}\alpha}}$$

La ecuación de momento angular, o bien la ecuación escalar de movimiento en $\hat{\phi}$, implican

$$R\cos\alpha m\ddot{\phi} = -\mu(mg - mR\omega^2\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\leftrightarrow \frac{R\cos\omega}{(g - R\omega^2\operatorname{sen}\alpha)} = -\mu dt$$

$$\leftrightarrow \frac{R\cos\alpha}{g}\frac{1}{(1-b^2\omega^2)}d\omega = -\mu dt$$

donde $b^2 = \frac{R\operatorname{sen}\alpha}{g}$.

Integramos esta ecuación entre ω_0 y 0 para ω, entre 0 y t_f para t, puesto que queremos encontrar el instante t_f en que la masa se detiene en su recorrido. De acuerdo a la pista dad en el enunciado, el resultado es

$$\frac{R\cos\alpha}{\sqrt{gR\operatorname{sen}\alpha}}\left\{arc\tanh(0) - arc\tanh(1/2)\right\} = -\mu t_f$$

Por lo tanto

$$t_f = \frac{R\cos\alpha}{\mu\sqrt{gR\operatorname{sen}\alpha}} arc\tanh(1/2)$$

`(1 pto.)`

Si ahora usamos las misma ecuación en $\hat{\phi}$, aplicando regla de la cadena, obetenemos

$$R\cos\alpha\frac{d\omega}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\mu(g - R\omega^2\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\leftrightarrow \frac{R\cos\alpha}{2}\frac{1}{(g - Ru\operatorname{sen}\alpha)}du = -\mu d\phi$$

donde hemos hecho el cambio de variable $u = \omega^2$. Esta ecuación la integramos entre ω_0^2 y 0 para u, entre 0 y ϕ_f para ϕ, siguiendo el mismo razonamiento anterior. Así,

$$\frac{-R\cos\alpha}{2R\operatorname{sen}\alpha}\ln\left(\frac{g}{(g - R\omega_0^2\operatorname{sen}\alpha)}\right) = -\mu\phi_f$$

$$\rightarrow \phi_f = \frac{\alpha}{2\mu}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

`(1 pto.)`

`Paulina Cecchi`