

Pauta Ejercicio 3

Parte (a)

Llamaremos p_1 a la partícula que está más lejos del suelo. El eje x será paralelo al plano inclinado.

Antes que la partícula de abajo se despegue, podemos plantear la siguiente ecuación en x para p_1 , a partir de la segunda ley de Newton.

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{2} + k(D_0 - x_1)$$

donde x_1 es la distancia entre el origen, que hemos definido en el 'tope', y p_1 .

Como esta EDO no es de fácil resolución, necesitamos hacer un cambio de variable para dejarla homogénea. El cambio de variable puede ser de la forma

$$s = x_1 + c$$

de modo que, convenientemente

$$kc = \frac{mg}{2} - kD_0$$

para que se vayan los términos constantes en la ecuación para x_1 .

De este modo, el cambio de variable debe ser

$$s = x_1 - D_0 + \frac{mg}{2k}$$

$$\ddot{s} = \ddot{x}_1$$

Así, obtenemos una ecuación para s

$$m\ddot{s} = -ks$$

$$\ddot{s} + \frac{k}{m}s = 0$$

Sabemos que la solución de esta ecuación es del tipo

$$s = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

puesto que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A y B son constantes por determinar. Resolviendo para las condiciones iniciales,

$$s(0) = x_1(0) - D_0 + \frac{mg}{2k} = D_0 - \delta - D_0 + \frac{mg}{2k}$$

$$\dot{s}(0) = \dot{x}_1(0) = 0$$

se obtiene

$$A = -\frac{2g}{\omega^2}$$

$$B = 0$$

Con lo que la coordenada x_1 queda determinada como

$$x_1(t) = D_0 - \frac{2g}{\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2}$$

(1pto)

Para la partícula que está más cerca del tope, que llamaremos p_2 , se cumple, en el eje x (antes del despegue)

$$N - k(D_0 - x_1) - \frac{mg}{2} = m\ddot{x}_2$$

donde N es la normal del 'tope' sobre p_2 .

Justo en el instante en que p_2 se despegue, que llamaremos t_1 , se cumple que

$$N = 0$$

$$\ddot{x}_2 = 0$$

Luego

$$kD_0 - kx_1 = -\frac{mg}{2}$$

Por lo tanto, utilizando las ecuaciones para ambas partículas, tenemos que en t_1 se cumple simultáneamente

$$x_1 = D_0 - \frac{2g}{\omega^2}\cos(\omega t_1) - \frac{g}{2\omega^2}$$

y

$$x_1 = D_0 + \frac{mg}{2k}$$

Igualando ambas expresiones, resulta

$$\cos(\omega t_1) = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{3\omega}$$

(1pto)

El estiramiento del resorte en ese momento es

$$x_1(t_1) = D_0 + \frac{g}{2\omega^2}$$

(0,5pto)

Como conocemos $x_1(t)$, derivando una vez podemos evaluar en la condición inicial, conocer la velocidad $\dot{x}_1$

$$\dot{x}_1 = \frac{2g}{\omega} \sin(\omega t)$$

En el instante t_1 , su valor es

$$\dot{x}_1(t_1) = \frac{2g}{\omega} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{g\sqrt{3}}{2}$$

(0,5pto)

$$x_{cm}(t) = \frac{D_0}{2} - \frac{5g}{4\omega^2} + \frac{g\sqrt{3}}{\omega}t - \frac{g}{4}t^2$$

En t_2 , su valor es

$$x_{cm}(t_2) = \frac{D_0}{2} - \frac{g}{2\omega^2}$$

(1pto)

Paulina Cecchi

Parte (b)

En todo momento, la velocidad en x del centro de masa es

$$v_{cm} = \frac{v_1 m + v_2 m}{m + m}$$

Inicialmente, la velocidad de la partícula p_2 es nula, de modo que

$$v_{cm}(0) = \frac{g\sqrt{3}}{2\omega}$$

En el eje x , la única fuerza externa sobre el sistema, es una de las componentes de la gravedad (la fuerza elástica es fuerza interna), de manera que

$$a_{cm} = \frac{-g}{2}$$

$$dv_{cm} = -\frac{g}{2}dt$$

Integrando y evaluando en la condición inicial, obtenemos la velocidad v_{cm} en todo momento

$$v_{cm} = \frac{g}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\omega} - t \right\}$$

Por lo tanto, la altura máxima se alcanza en el instante t_2 tal que

$$t_2 = \frac{\sqrt{3}}{\omega}$$

(1pto)

Integrando la expresión que conocemos para v_{cm} , podemos conocer la posición del centro de masa en x , x_{cm}

$$x_{cm} - x_{cm}(0) = \frac{g}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{\omega}t - \frac{t^2}{2} \right\}$$