I.4 Sistemas de coordenadas

La resolución de muchos problemas cinemáticos requiere de un sistema de coordenadas explícito respecto al cual se refiere el movimiento. Uno de los sistemas posibles, descrito en la Sección I.1, corresponde a las coordenadas intrínsecas, en término de las cuales se determinaron expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula. Existen otros sistemas de coordenadas que son de gran utilidad para el análisis de problemas mecánicos. En esta sección estudiaremos en particular las coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

• Coordenadas cartesianas

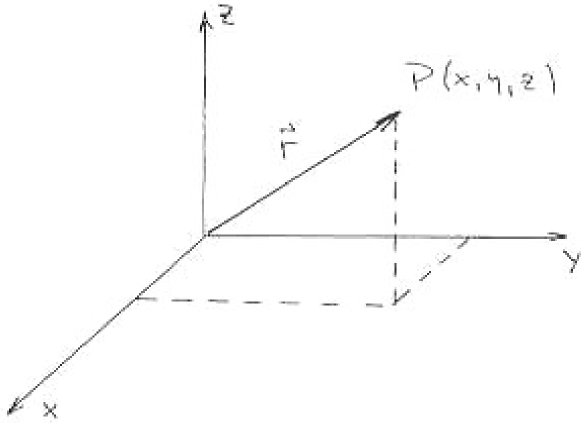
En este caso el vector posición $\vec{r}$, que describe la trayectoria de una partícula, se refiere a una base tri-ortogonal, unitaria, $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, fija en el espacio,

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

en que: $x(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{\imath}$

$y(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{\jmath}$

$z(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{k}$



La velocidad se expresa como:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} + v_z(t)\,\hat{k}$$

en que: $v_x(t) = \dot{x}$; $v_y(t) = \dot{y}$; $v_z(t) = \dot{z}$.

De igual forma, la aceleración se expresa como:

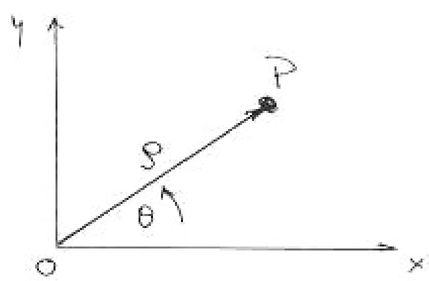
$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{\imath} + a_y(t)\,\hat{\jmath} + a_z(t)\,\hat{k}$$

en que: $a_x(t) = \ddot{x}$; $a_y(t) = \ddot{y}$; $a_z(t) = \ddot{z}$.

Al expresar el movimiento en coordenadas cartesianas se obtienen componentes independientes para la posición, velocidad y aceleración según cada uno de los ejes tri-ortogonales. De este modo, estas componentes pueden ser analizadas en forma independiente, con sus correspondientes condiciones de borde.

• Coordenadas polares

Este tipo de coordenadas es útil en ciertos casos para describir el movimiento de una partícula en un plano. En efecto, la ubicación del punto P asociado a una partícula puede determinarse, con respecto a un origen O, en términos de la distancia ρ del punto P al origen O (radio polar) y del ángulo θ que forma el radio polar con un eje arbitrario de referencia OX (ángulo polar).



Si el eje de referencia OX coincide con el eje X de un sistema cartesiano centrado en O, se tiene que:

$x = \rho \cos\theta$ $\qquad$ $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

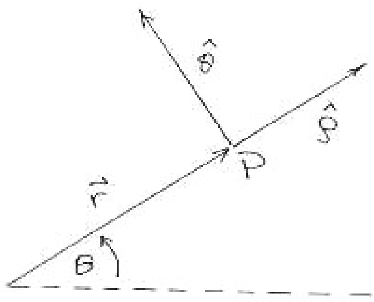
$y = \rho \operatorname{sen}\theta$ $\qquad$ $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$

El vector posición queda determinado por: $\vec{r}(t) = \rho(t)\,\hat{\rho}(t)$

en que $\hat{\rho}(t)$ es un vector unitario en la dirección radial. Las variables del movimiento $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ se expresan en este sistema en función de sus componentes a lo largo de los vectores unitarios y ortogonales $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$, este último definido en la dirección de crecimiento de θ .

La velocidad queda determinada por:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$



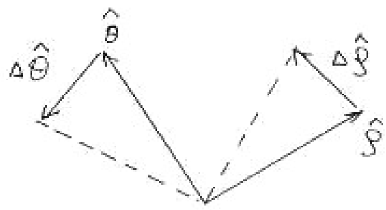
Analizamos ahora la derivada temporal del vector unitario $\hat{\rho}$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}\frac{d\hat{\rho}}{d\theta}$$

por otra parte como

$$\frac{d(\hat{\rho}\bullet\hat{\rho})}{dt} = 0 = 2\hat{\rho}\bullet\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

se deduce que la derivada de $\hat{\rho}$ es perpendicular a $\hat{\rho}$. Del análisis geométrico de la figura adjunta concluye que



$$\frac{|d\hat{\rho}|}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{|\Delta\hat{\rho}|}{\Delta\theta} = 1$$

y que

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

Reemplazando en la expresión para la velocidad, resulta finalmente: $\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

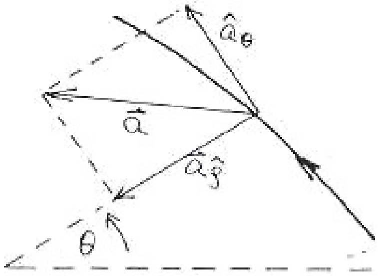
En el cálculo de la aceleración en coordenadas polares, se requiere de una expresión para $d\hat{\theta}/dt$. De la figura anterior se observa que:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\rho}$$

Luego,

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

es decir, la aceleración puede expresarse en términos de una componente radial $\vec{a}_\rho$ y una transversal $\vec{a}_\theta$.



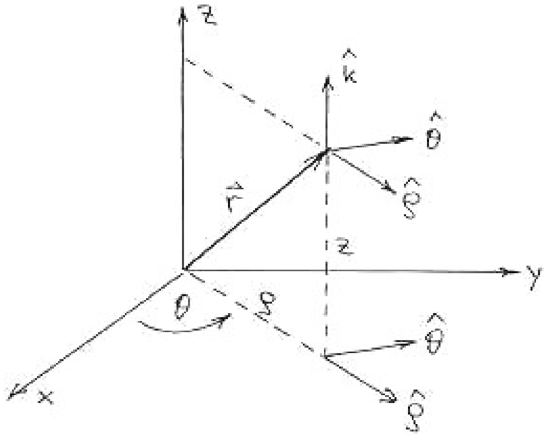
<u>Observación:</u> El cálculo de la velocidad y aceleración pueden hacerse, alternativamente, en una base cartesiana, refiriendo luego los resultados a la base polar (ρ, θ). En efecto, si expresamos el vector posición $\vec{\mathbf{r}}$ en coordenadas cartesianas tenemos:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} = \rho\cos\theta\,\hat{\imath} + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} = \rho\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) = \rho\,\hat{\rho}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = d\vec{\mathbf{r}}(t)/dt = \rho\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) + \rho\,\dot{\theta}\,(-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

La aceleración se obtiene en forma análoga.



• Coordenadas cilíndricas

En el caso de un movimiento tri-dimensional, la posición de una partícula puede describirse en términos de las coordenadas cilíndricas ρ, θ, z, que corresponde a una mezcla entre un sistema de coordenadas polares (que describe el movimiento en un plano) y un sistema cartesiano para representar el movimiento en la dirección perpendicular al plano.

El vector posición es: $\vec{\mathbf{r}}(t) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{\mathbf{k}}$

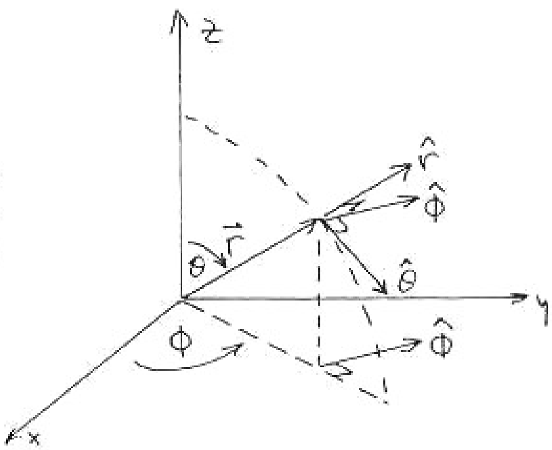
En el extremo del vector posición se asocia una tríada tri-ortogonal unitaria $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{k}})$ de modo tal que:

$$\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{\mathbf{k}}; \qquad \hat{\theta} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\rho}\,; \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\rho} = \hat{\theta}$$

Recordando las expresiones para la velocidad y aceleración en coordenadas polares y teniendo en cuenta que $\hat{\mathbf{k}}$ es un vector constante resultan las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}}$$



• Coordenadas esféricas

En una forma alternativa el movimiento tri-dimensional se puede describir mediante coordenadas esféricas. En este caso la posición de la partícula queda determinada por las coordenadas r, θ y ϕ, donde:

r : distancia del punto P al origen del sistema de coordenadas.

θ : ángulo medido con respecto al eje Z y que varía entre 0 y π.

ϕ : ángulo que forma el eje X con la proyección del vector $\vec{\mathbf{r}}$ sobre el plano definido por los ejes X e Y. Varía entre 0 y 2π.

Como estrategia para encontrar expresiones para la velocidad y la aceleración utilizamos la relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas.

$x = r \,\mathrm{sen}\, \theta \cos \phi$
$y = r \,\mathrm{sen}\, \theta \,\mathrm{sen}\, \phi$
$z = r \cos \theta$

De estas relaciones se pueden deducir las expresiones inversas:

$$r = \left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2} \qquad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}\right] \qquad \phi = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

Asociamos una tríada tri-ortogonal y unitaria $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ al vector posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$ tal que:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}\,; \qquad \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{\mathbf{r}}\,; \qquad \hat{\phi} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\theta}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en la dirección radial creciente, mientras que $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ corresponden a vectores unitarios en la dirección creciente de θ y ϕ, respectivamente. En consecuencia, el vector posición queda definido por $\vec{\mathbf{r}}(t) = r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)$

En el cálculo de la velocidad y aceleración se requiere obtener expresiones para las derivadas temporales de los vectores base $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$. Para esto expresamos estos vectores con respecto a una base cartesiana centrada en el origen O. Las derivadas temporales calculadas en este sistema son posteriormente expresadas en el sistema de coordenadas esféricas. Analizando la figura anterior es posible concluir que:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathrm{sen}\,\theta \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\phi} = -\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

Al derivar estas expresiones con respecto al tiempo se obtienen las siguientes identidades:

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\phi}$$
$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\phi}$$
$$\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\theta}$$

Por lo tanto, la velocidad se expresa por: $\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\hat{\mathbf{r}}}$ y finalmente,

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\,\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\phi}$$

y la aceleración $\vec{\mathbf{a}}(t) = \dot{\vec{\mathbf{v}}}(t)$, como :

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = (\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta} +$$
$$+ (2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\,\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\cos\theta)\,\hat{\phi}$$