Pauta Examen
SISTEMAS NEWTONIANOS

- 1)
  - a) Ecuación de movimiento angular (c/r al punto fijo):

$$I\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta$$

Usando el teorema de Steiner:

$$I = MR^2 + I_{CM} = 2MR^2$$

Aproximación de pequenhas oscilaciones:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta = 0$$

Condición del problema:

$$\frac{g}{L} = \frac{g}{2R}$$

luego $L = 2R$

  - b) Conservación de la energía (escrita c/r al punto fijo):

$$E = cte = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - MgR\cos\theta$$

Igualando energías para $\theta = 0, \pi$ (asi alcanza a llegar al punto más alto y luego cae):

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}_0^2 - MgR = MgR$$

luego

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

- 2) Ecuación de movimiento angular:

$$I\ddot{\theta} = -\eta\theta$$

Usando el teorema de Steiner:

$$I = 2(MR^2 + I_{CM}) = \frac{14}{5}MR^2$$

luego

$$\ddot{\theta} + \frac{5\eta}{14MR^2}\theta = 0$$

Condición del problema:

$$2\pi\sqrt{\frac{14MR^2}{5\eta}} = 1seg$$

luego

$$2\pi\sqrt{\frac{14 \times 2,7 \times 4\pi R^5}{3 \times 5 \times 1250}} = 1seg$$

Entonces

$$R^{5/2} = \sqrt{\frac{15 \times 1250}{56 \times 2,7\pi}}/2\pi cm^{5/2} = 0.999cm^{5/2} \simeq 1cm^{5/2}$$

luego

$$D = 2R = 2cm$$

- 3)

  Fuerza de empuje se iguala al peso del cilindro:

$$\rho_2 gA(h-d) + \rho_1 gAd = \rho ghA$$

  luego

$$\rho = (1 - d/h)\rho_2 + (d/h)\rho_1$$

- 4)
  - a) El desplazamiento vertical de los elementos de la cuerda es:

$$u = f(x - ct)$$

    La velocidad de los elementos de la cuerda es:

$$v = \partial u/\partial t = -cf'(x - ct)$$

    El punto C tiene pendiente negativa, luego la velocidad es vertical hacia arriba, el B tiene pendiente nula luego su velocidad es nula, y el A pendiente positiva luego velocidad vertical hacia abajo.

- b) La velocidad en cada sección es $\sqrt{T/\sigma}$, con σ la densidad lineal de masa, i.e. $\sigma = \rho r^2$. Como la tensión y la densidad son constantes, entonces la razón entre velocidades es $c_1/c_2 = r_2/r_1$. Si, puede darse una solución estacionaria: la ecuación de ondas para una frecuencia común en ambos segmentos implica una longitud de onda diferente en cada segmento ($\omega = ck = 2\pi c/\lambda$); estas dos soluciones con dos longitudes de onda se deben compatibilizar a una frecuencia específica satisfaciendo dos condiciones de borde en la zona de contacto (condiciones sobre el desplazamiento y su pendiente) y las condiciones de borde en los extremos de los segmentos.
- c) Para la velocidad terminal, existe un equilibrio de fuerzas (aceleración nula) (roce más peso se equilibran con el empuje):

$$\frac{1}{2} C_d A \rho_a v^2 + \rho_{He} g V = \rho_a g V$$

con $A = \pi R^2$ y $V = 4\pi R^3/3$. Luego,

$$v = \sqrt{8R(1 - \rho_{He}/\rho_a)/(3C_d)}$$