

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = 2mgR ,$$

o sea,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{R}} .$$

### Solución al problema 18

- a) El cambio de energía potencial debe ser igual a la energía cinética final. La masa  $2m$  baja una distancia  $h$  mientras que la masa  $m$  sube una distancia  $h$ . Luego

$$\Delta U = mgh .$$

Sea  $v_0$  la rapidez final de la masa  $2m$ , justo antes de chocar con el suelo. Entonces la energía cinética, en ese instante, es

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 ,$$

donde  $\omega_0 = v_0/R$  es la velocidad angular final de la polea. Usando el valor  $I = mR^2/2$  para el momento de inercia se encuentra que

$$K = 2mv_0^2 .$$

Igualando  $K$  con  $\Delta U$  se encuentra

$$v_0^2 = \frac{gh}{2} .$$

- b) Los diagramas de cuerpo libre de las dos masas nos dan las ecuaciones de movimiento

$$\tau_1 - mg = ma$$

y

$$(2m)g - \tau_2 = (2m)a ,$$

donde  $a$  es la aceleración (hacia arriba) de la masa  $m$ . Sea  $\ddot{\theta}_0$  la aceleración angular de la polea. El hecho de que la cuerda no resbale sobre la polea nos da la relación

$$\ddot{\theta}_0 R = a .$$

Finalmente, evaluando el torque total que actúa sobre la polea se encuentra la ecuación de movimiento para la rotación

$$\tau_2 R - \tau_1 R = I\ddot{\theta}_0 .$$

Tenemos cuatro ecuaciones para las cuatro incógnitas  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $a$  y  $\ddot{\theta}_0$ . Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra

$$a = \frac{2}{7}g ,$$

$$\tau_1 = \frac{9}{7}mg$$

y

$$\tau_2 = \frac{10}{7}mg .$$

- c) Mientras las masas están cayendo, como la polea no se desplaza, la fuerza total sobre ella debe ser nula. Por lo tanto, la tensión de la cuerda que sujeta la polea debe ser

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{19}{7}mg .$$

- d) Consideremos la situación que se tiene cuando la masa  $2m$  ha tocado el suelo y todo está detenido. El torque total sobre la polea es nulo y, por lo tanto, la tensión de la cuerda que pasa por la polea debe ser la misma a ambos lados, siendo su valor  $mg$ . Concluimos que la tensión de la cuerda que sujeta la polea, en este caso, es

$$\tau = 2mg .$$

### Solución al problema 19

Sólo la parte superior de la correa de transmisión transmite fuerza. Denotemos ésta por  $F$ . La ecuación de movimiento para la rotación de la polea #2 es

$$FR = I\ddot{\theta}_2 .$$

Para la polea #1 ésta es

$$TR - F\frac{R}{2} = I\ddot{\theta}_1 .$$

El diagrama de cuerpo libre para la masa  $M$  nos da la ecuación

$$Mg - T = Ma ,$$

donde  $a$  es la aceleración (hacia abajo) de la masa  $M$ . Los ángulos de rotación de ambas poleas no son independientes sino que están relacionados por

$$\theta_1 \frac{R}{2} = \theta_2 R .$$

Derivando dos veces respecto al tiempo y cancelando el radio  $R$  se obtiene

$$\ddot{\theta}_1 = 2\ddot{\theta}_2 .$$