Solución Control 2, FI 1002, Otoño 2010

1.

2. *a*) El diagrama de cuerpo libre para un instante justo después de soltar al sistema del reposo consta de la fuerza elástica apuntando hacia arriba paralela a la superficie del plano, la fuerza de roce estático también hacia arriba y paralela a la superficie del plano, y la fuerza de gravedad, actuando en el centro de masa del disco.

   b) Elijo un sistema de coordenadas tal que $\ddot{\theta}$ es positivo saliendo del papel y x es paralelo al plano inclinado, positivo hacia abajo y con origen en el largo natural del resorte. Sea el punto P el punto de apoyo del disco sobre el plano $\sum \tau_P = I_P\ddot{\theta}$

$$-RMg\sin\alpha + Rkx = I_P\ddot{\theta} \tag{1}$$

   Imponiendo la condición de rodar sin resbalar, $R\ddot{\theta} = -\ddot{x}$
   Además, $I_P = I_o + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$
   Reemplazando lo anterior uno obtiene la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}x = \frac{2}{3}g\sin\alpha \tag{2}$$

   La ecuación de movimiento también se puede encontrar escribiendo la ecuación de conservación de la energía mecánica en el sistema y derivándola respecto del tiempo.

   c) Resolviendo la ecuación de movimiento usando las condiciones iniciales uno obtiene,

$$x(t) = \frac{Mg\sin\alpha}{k}(1 - \cos(\omega t)) \tag{3}$$

   con $\omega^2 = \frac{2}{3}\frac{k}{M}$ $\ddot{x} = 0 => \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...$
   para el primer tiempo en que la aceleración se anula, que denotamos con t^*

$$\dot{x}(t^*) = \frac{Mg\sin\alpha\omega}{k} \tag{4}$$

$$x(t^*) = \frac{Mg\sin\alpha}{k} \tag{5}$$

   d) Notar que $R\dot{\theta} = -\dot{x}$, luego

$$\dot{\theta}(t^*) = -\frac{Mg\sin\alpha\omega}{kR} \tag{6}$$

3. *a*) La condición de *rodar sin resbalar* se obtiene cuando el roce entre una rueda y la superficie (suelo) es estático, es decir no hay desplazamiento del punto de contacto entre la rueda y el piso, luego la velocidad instantánea de dicho punto es nula.

   En un sólido rígido, la velocidad angular de rotación de cualquier punto c/r a otro del mismo cuerpo es siempre idéntica. Si la velocidad angular del sólido c/r a su centro de masa es ω, entonces la velocidad angular de rotación c/r al punto de apoyo es también ω. En el caso de rodadura sin resbalar el punto de contacto está instantáneamente en reposo, luego la velocidad lineal de cualquier punto de la rueda es $v = d\omega$, donde d es la distancia al punto de contacto.

   b) i. $x(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\Omega t + \phi)$

ii. La amplitud decrece aproximadamente desde 3m hasta $1{,}1 \sim 3/e$ entre $t = 6$s y 8s. Luego tenemos $2\tau \sim 6 \rightarrow 8$s, o bien $\tau \sim 3 \rightarrow 4$s.

iii. Del gráfico se observa que la amplitud es máxima aproximadamente cada $\Delta t = 1$s, en particular en $t = 0$ la amplitud es máxima, de donde $\cos\phi = 1$ y la constante de fase es $\phi = 0$. A partir del gráfico leemos entonces directamente $A = x(t = 0) \sim 3$m, o 3,1m.

iv. El período es $T \sim 1\text{s} = \frac{2\pi}{\Omega}$, luego obtenemos $\Omega \sim 2\pi$ rad/s.
De la relación $\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$ obtenemos $\omega_0^2 \sim 4\pi^2 + \frac{1}{50}$ de donde

$$\omega_0 \sim 2\pi\sqrt{1 + \frac{1}{200\pi^2}} \sim 2\pi(1 + \frac{1}{4000}) \sim 2\pi\text{rad/s} = \Omega$$

v. $k = m\omega_0^2 = 4\pi^2 m \sim 40$ N/m.