Solución Control 1, FI 1002, Otoño 2010

1. *a*) dt = 0.1 ; t = 0:dt:4 ; x = cos(t) .* exp(-0.5*t); plot(t,x)

   b) Resuelto sin calculadora:
   $F = A * U + B = 4{,}9 * 4{,}5 + 12{,}25 = 22{,}05 + 12{,}25 = 34{,}30$

   $$\begin{aligned}\delta_F^2 &= \left(A * U\sqrt{\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\delta U}{U}\right)^2}\right)^2 + \delta_B^2 = \left(4{,}9 * 4{,}5 * \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{4{,}9}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{12{,}25}\right)^2}\right)^2 + 0{,}05^2 \\ &\sim \left(22{,}05 \times \sqrt{\frac{1}{2401} + \frac{1}{400 \times 150}}\right)^2 + \frac{1}{400} \sim \left(\frac{22}{48}\right)^2 + \frac{1}{400} \sim 1/4 + 1/400 \sim 1/4\end{aligned}$$

   luego podemos escribir $(F = 34{,}3 \pm 0{,}5)$N, donde el error está dominado por δA.

   c) Necesitamos un eje tal que el objeto no tenga extensión perpendicular a él, luego sólo puede ser un hilo (o alambre) recto: el momento de inercia de un hilo recto es cero c/r al eje que coincide con el hilo.

   d) Por geometría tenemos un triángulo rectángulo con catetos L y $L/2$; luego la hipotenusa (distancia entre A y B) es $\sqrt{5}L/2$ y los ángulos de la base son $\sin\theta_B = 2/\sqrt{5}$ y $\sin\theta_A = 1/\sqrt{5}$. El triángulo entre B y los dos centros de las barras es rectángulo isósceles, con hipotenusa $L/\sqrt{2}$. Las fuerzas aplicadas sobre el sistema son el peso de cada barra sobre su centro de masa, y la normal del piso en los puntos A y B.
   Para determinar las normales N_A y N_B calculamos la suma de torques c/r a los puntos de apoyo A y B (con el eje $\hat{z}$ apuntando hacia afuera del papel):

   $$\Sigma\vec{\tau}_A \cdot \hat{z} = N_B\frac{\sqrt{5}}{2}L - mg\frac{L}{2}\sin\theta_B - mgL\sin\theta_B = 0$$

   $$\Sigma\vec{\tau}_B \cdot \hat{z} = -N_A\frac{\sqrt{5}}{2}L + mg\frac{L}{2}\sin\theta_A + mg\frac{L}{\sqrt{2}}\sin(\pi - \pi/4 - \theta_A) = 0$$

   Alternativamente se puede usar la ecuación de fuerzas ($\hat{y}$ vertical hacia arriba):

   $$N_A + N_B - 2mg = 0$$

   Dos cualesquiera de estas tres ecuaciones son suficientes para resolver el problema.

   e) Para el péndulo físico, usamos $I = \frac{1}{3}mL^2$ (c/r a un extremo) y por conservación de energía ($\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\Delta h_{\rm cm}$). Usando $\Delta h = (L/2)\cos(\pi/4) = \sqrt{2}L/4$ obtenemos

   $$\omega^2_{\text{físico}} = \frac{mg}{I}\frac{\sqrt{2}L}{2}$$

   Para el péndulo simple usamos $\omega = v/L$ y conservación de energía ($\frac{1}{2}mv^2 = mg\Delta h$), con $\Delta h = L\cos(\pi/4) = \sqrt{2}L/2$ para obtener

   $$\omega^2_{\text{simple}} = \frac{\sqrt{2}g}{L}$$

   luego

   $$\frac{\omega_{\text{físico}}}{\omega_{\text{simple}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mL^2}{I}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

2. *a*) La ecuación de la circunferencia centrada en el origen es $x^2 + y^2 = R^2$, luego se puede despejar $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Si divido el semidisco en mini-cuadraditos de lados $dx = dy << R$ y masa dm, entonces el centro de masa (CM) del semi-disco se obtiene sumando:

   dx = 0.01; dy = dx
   xcm = 0.0; ycm = 0.0; ncell = 0
   for x=–1:dx:1
   for y=0:dy:$\sqrt{1^2 - x^2}$
   xcm = xcm +x; ycm = ycm +y; ncell = ncell+1

   La posición del centro de masa es entonces (xcm/ncell, ycm/ncell)*R. Notar que el resultado debe ser xcm = 0, pero si lo calculan pueden comprobar si hay errores significativos de redondeo. Dado dx=0.01 y que el cálculo es lineal, uno espera un error del orden de un 1 % en la determinación del CM.

   Alternativamente se puede sumar primero en y y luego con límites $x(y)$; o bien sumar rectángulos horizontales, o verticales, o semi-arcos de circunferencia. En cada caso hay que tener cuidado con "pesar"las sumas con la fracción del área (masa) que cubre cada elemento de la suma.

   b) El momento de inercia del disco completo c/r a su centro es $I_{\text{disco}} = I_{\text{izquierdo}} + I_{\text{derecho}} = \frac{1}{2}MR^2$. Pero el momento de inercia del lado izquierdo es idéntico al derecho por simetría, luego

$$I_{\text{semidisco}} = \frac{1}{4}MR^2$$

   c) La vertical pasa por el centro de masa, y la distancia desde el borde superior hasta el centro de masa es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos ycm y R; luego

$$\tan\beta = ycm/R$$

3. a i. El torque es el producto cruz $\vec{r}_{cm} \times m\vec{g}$ donde $\vec{r}_{cm}$ es el vector desde el punto O hasta el centro de masa del cuerpo.

   a ii. Si el cuerpo está en reposo entonces el torque neto debe ser nulo. Para ello los vectores $\vec{r}_{cm}$ y $\vec{g}$ deben ser paralelos. Esto sólo es posible si el centro de masa y el punto O están uno sobre el otro (a lo largo de una vertical local).

   a iii. Se cuelga el cuerpo desde un punto A cualquiera de él y se deja en reposo. Con una plomada se marca la vertical que pasa por A. Luego se repite la operación desde otro punto cualquiera B del cuerpo. La intersección de ambas rectas marcará la posición del Centro de Masa.

   b) Si definimos como (X, Y) la posición del centro de masa del triángulo grande (de masa m), entonces la posición del centro de masa de cada triángulo pequeño será $(X/2 + b/2, Y/2)$ y $(X/2, Y/2 + a/2)$, cada uno con masa $m/4$. El rectángulo tendrá masa $m/2$ y centro de masa en $(b/4, a/4)$. Luego el centro de masa del triángulo grande lo podemos expresar como:

$$m * (X, Y) = \frac{m}{2}(b/4, a/4) + \frac{m}{4}(X/2 + b/2, Y/2) + \frac{m}{4}(X/2, Y/2 + a/2)$$

   de donde despejamos

$$X = \frac{b}{3}, Y = \frac{a}{3}$$

4. *a*) Inicialmente, el centro de masa de cada barra está ubicado en $(X_m = L/2, Y_m = 0)$ y $(X_M = \cos\beta * L/2, Y_M = -\sin\beta * L/2)$, de donde obtenemos el centro de masa del sistema como

$$X_{cm}(t=0) = \frac{(m + M\cos\beta)}{m+M}\frac{L}{2}\ ;\ Y_{cm}(t=0) = -\frac{M\sin\beta}{m+M}\frac{L}{2}$$

Podemos notar que la recta que une A con el CM, subtiende un ángulo α_m con la barra horizontal m dado por $\tan\alpha_m = \frac{M\sin\beta}{m+M\cos\beta}$.
Al pasar M por la vertical, podemos repetir el cálculo anterior obteniendo ($X_m = \sin\beta * L/2, Y_m = -\cos\beta * L/2$) y ($X_M = 0, Y_M = -L/2$) de donde

$$X_{cm}(t=t_1) = \frac{(m\sin\beta)}{m+M}\frac{L}{2} \;;\; Y_{cm}(t=t_1) = -\frac{m\cos\beta + M}{m+M}\frac{L}{2}$$

de donde obtenemos la diferencia de altura del centro de masa como:

$$|\Delta Y_{cm}| = \frac{m\cos\beta + M - M\sin\beta}{m+M}\frac{L}{2}$$

Usando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de una barra c/r a su extremo es $I_A = I_{cm} + m(L/2)^2 = \frac{1}{3}mL^2$, luego el momento de inercia del conjunto será

$$I_A = \frac{1}{3}(m+M)L^2$$

Por conservación de energía ($\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\Delta Y$) obtenemos

$$\omega^2(t=t_1) = \frac{2}{I_A}(m+M)g\Delta Y_{cm} = \frac{m\cos\beta + M - M\sin\beta}{m+M}\frac{3g}{2L}$$

b) Por conservación de energía y por simetría, se debe cumplir que

$$X_{cm}(t=t_2) = -X_{cm}(t=0) = -\frac{(m+M\cos\beta)}{m+M}\frac{L}{2} \;;\; Y_{cm}(t=t_2) = Y_{cm}(t=0) = -\frac{M\sin\beta}{m+M}\frac{L}{2}$$

EL ángulo entre la recta A–CM y la horizontal es entonces α_m al igual que en $t=0$. Luego la barra m subtiende un ángulo $2\alpha_m$ c/r a la horizontal, y la barra M subtiende un ángulo $\alpha_M = 2\alpha_m - \beta$ c/r a la horizontal.

c) Si $m = M$ entonces recordando las identidades de la tangente del ángulo medio vemos que

$$\tan\alpha_m = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \tan(\beta/2)$$

con lo cual la barra M está horizontal ($\alpha_M = 0$ en el item b), tal como esperamos.

d) Para $\beta = 0$ $X_{cm}(t=t_2) = -\frac{L}{2}$; $Y_{cm}(t=t_2) = 0$, es decir, las barras están en posición horizontal al otro lado de la vertical, tal como esperamos.