FI 1001-1: Clase 6 (Resumen)

CONTENIDOS

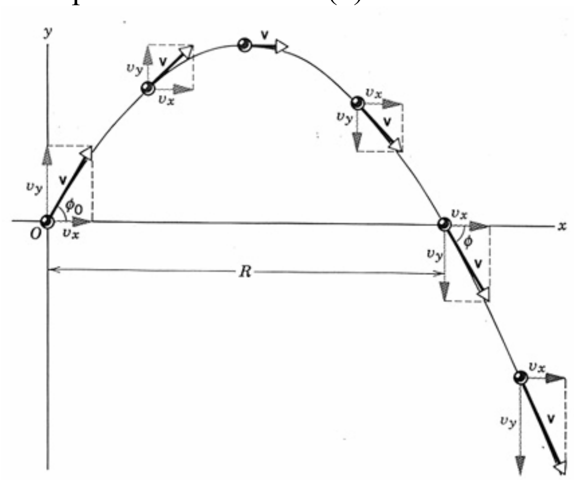
RECORDATORIO

Proyectiles

Vimos que en el caso del lanzamiento de proyectiles:

$\hat{x}$: dirección horizontal	$\hat{y}$: dirección vertical
$x(t) = x_o + u_o t \quad (1)$	$y(t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$
$u(t) \equiv \frac{dx}{dt} = u_o \quad \text{(constante)} \quad (2)$	$v(t) \equiv \frac{dy}{dt} = v_o - gt \quad (5)$
$a_x(t) = \frac{du}{dt} = 0 \quad (3)$	$a_y(t) = \frac{dv}{dt} = \text{-g} \quad \text{(constante)} \quad (6)$

De modo que tanto el cambio de posición vertical (y) en el tiempo es una parábola y también y en función de la posición horizontal (x).



También vimos que la velocidad del móvil es la suma (superposición) de las velocidades horizontal y vertical:

$$\vec{v}_{tot} = \vec{v}_{horizontal} + \vec{v}_{vertical}$$

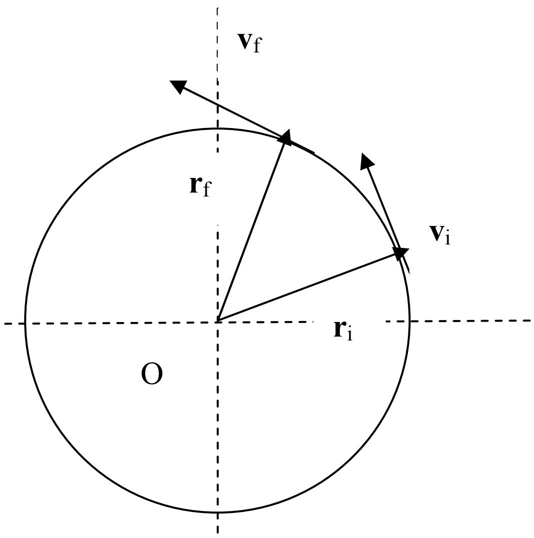
En otras palabras, gracias al principio de superposición, podemos descomponer o separar el movimiento en dos componentes independientes.

Gráficos

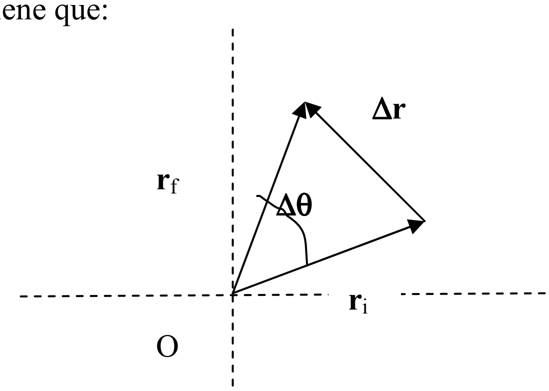
¿Cómo se grafica la siguiente situación?: Dos móviles A y B salen desde un punto separados por un lapso t. ¿Qué condición debe cumplirse para que uno alcance al otro?

OTRO MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL: MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

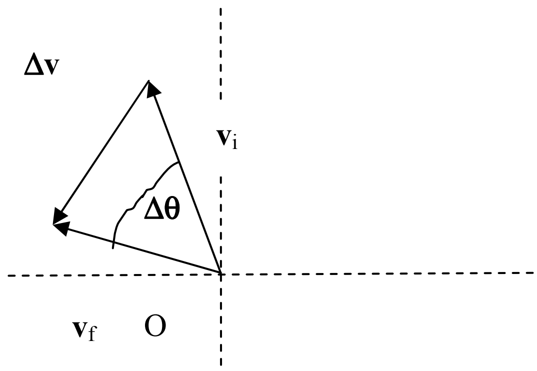
En el movimiento circular uniforme se tiene una trayectoria circular, una rapidez constante de giro (v_t) y una aceleración perpendicular a la velocidad y dirigida al centro del círculo (a_c) de radio r. En cada instante la velocidad del móvil es tangencial a la trayectoria o, equivalentemente, perpendicular al vector posición.

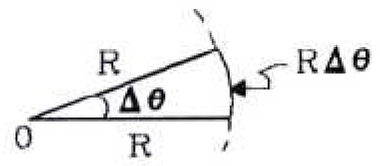


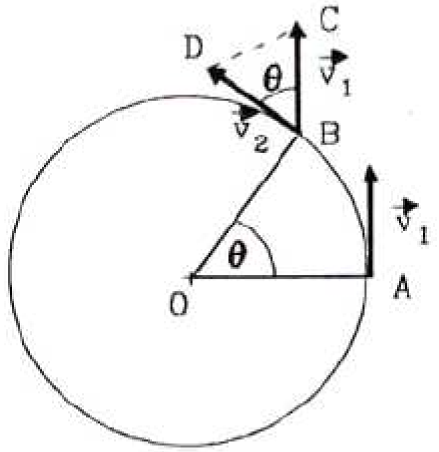
Geométricamente se tiene que:



y como los vectores de velocidad inicial y final son perpendiculares a los respectivos vectores posición, también se tiene que:







pues los triángulos son similares. Además, como los triángulos son similares, también debe cumplirse que:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v_i} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r_i} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v_f} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r_f}$$

Por lo tanto, la velocidad cambia según:

$$|\Delta\vec{v}| = \frac{v}{r}|\Delta\vec{r}|$$

Y en promedio, la aceleración tendrá una magnitud:

$$a_{media} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|t_f - t_i|} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

Y considerando intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños (tomando el límite), se tendrá entonces:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Esa es la magnitud de la aceleración responsable de mantener al objeto en una trayectoria circular. A esta aceleración dirigida hacia el centro del círculo se la llama **aceleración centrípeta.**

NB. La magnitud de la aceleración centrípeta es constante en el tiempo pero no así la dirección.

Como el movimiento es sobre un círculo, se cumplirá que sobre un intervalo de tiempo T se recorrerá una distancia igual al perímetro del círculo y se tendrá la relación:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Como la rapidez es constante, el ángulo también variará uniformemente y se satisfará la relación:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

O equivalentemente, considerando intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños (en el límite):

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\pi}{T} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r} = \frac{v}{r}$$

La cantidad ω corresponde al módulo de la **velocidad angular** e indica cuán rápido cambia el ángulo en el tiempo. En el caso de un movimiento circular uniforme, esta velocidad es constante.

Ejemplo 1: : Conceptos

Indique si las proposiciones siguientes son falsas o verdaderas:

a) Si un objeto realiza un movimiento circular entonces, necesariamente, existe una aceleración centrípeta.

Verdadero. Si no existiera dicha aceleración el movimiento seguiría tangente a la trayectoria.

b) Si hay una aceleración tangencial el movimiento no puede ser circular

Falso. La trayectoria puede circular y a la vez cambiar la magnitud de la velocidad o equivalentemente con velocidad angular variable.

c) Un movimiento circular uniforme se caracteriza por una aceleración tangencial nula y una aceleración centrípeta no nula

Verdadero.

d) Si la aceleración centrípeta es nula el movimiento es circular y uniforme

Falso. Si no hay aceleración centrípeta el movimiento no es circular (Basta que la aceleración tangencial sea nula para que sea uniforme).

e) La rapidez en un movimiento circular es proporcional a la rapidez angular

Verdadero.

f) En un movimiento circular, si la aceleración angular es nula entonces el módulo de la velocidad es constante

Verdadero. No hay aceleración tangencial y por lo tanto el módulo de la velocidad no cambia.

Ejemplo 2. Rapidez angular

Un muchacho circula en una bicicleta con $v=10$ m/s. ¿Cuál es la rapidez angular de un punto del neumático de la bicicleta y los mismos son de radio $r=34$cm?

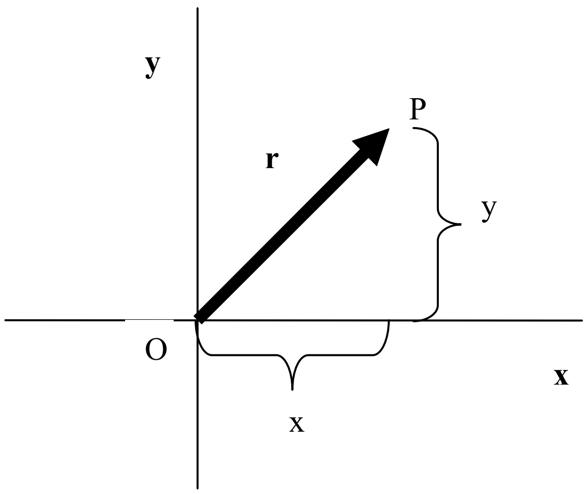
$W=v/r=29$ rad/s…¡no tiene dimensiones! Se mide en radianes

COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES

Para definir la posición de un punto en un plano (bidimensional) son necesarios dos parámetros. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas, podemos definir la posición del punto P especificando las proyecciones del vector posición **r** especificando su proyección en los ejes de las abscisas y las ordenadas:

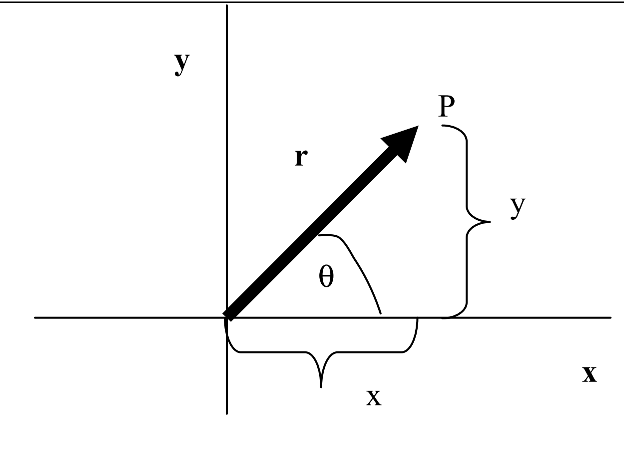
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

Es decir, especificando las distancias x e y a lo largo de las direcciones unitarias de abscisas y ordenadas:



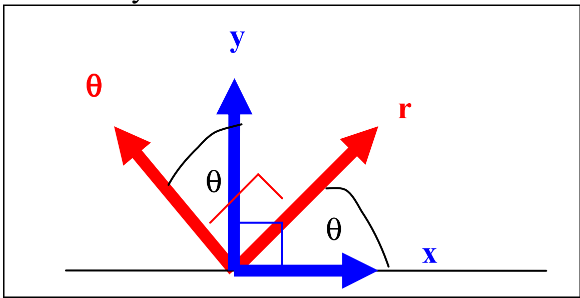
Alternativa y equivalentemente, podemos describir el vector posición especificando la distancia r del vector posición a un punto fijo O y el ángulo θ respecto de una recta fija que pasa por el punto O. Las **coordenadas polares** del punto P están completamente determinadas por las coordenadas r y θ. Asociadas a estas coordenadas, se definen dos direcciones independientes: la dirección en que cambia la distancia r (**dirección radial**) y la dirección en que cambia el ángulo (**dirección tangencial**).

Como se está describiendo el mismo vector, se debe tener una equivalencia entre las coordenadas cartesianas (x,y) y las coordenadas polares. Estas relaciones son trigonométricas y corresponden a:



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

También, trigonométricamente podemos encontrar la relación entre las direcciones de abscisas y ordenadas en términos de las direcciones radial y tangencial pues se tendrá:



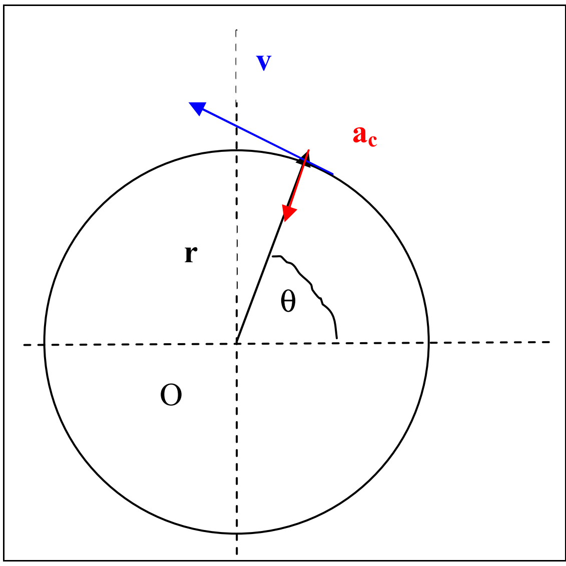
$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{y}$$
$$\hat{\theta} = -\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

NB. ¿Cómo se expresan las direcciones **x** e **y** en términos de **r** y **θ**?

En coordenadas polares, el vector posición queda "simplemente" dado por:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

Vimos que en el caso de un movimiento circular uniforme: la trayectoria es un círculo, la velocidad es tangencial al círculo y tiene una magnitud constante v y que la aceleración es centrípeta y con una magnitud proporcional al cuadrado de la rapidez e inversamente proporcional al radio del círculo. Además, definimos la rapidez angular la cual es proporcional a la rapidez e inversamente proporcional al radio.

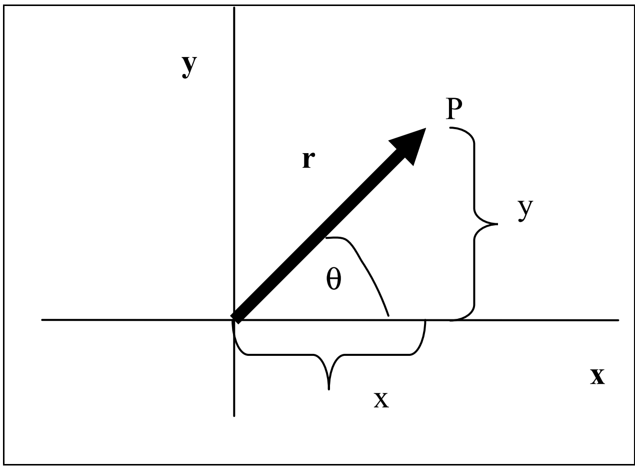


$$\vec{v} = v\hat{\theta} = r\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{r} = -r\omega^2\hat{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

También introdujimos el sistema de coordenadas polares que sirven para describir el movimiento circular. Encontrando que:



$$x = r\cos\theta$$

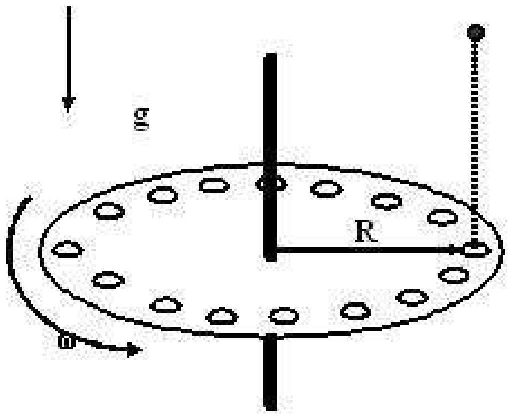
$$y = r\,\mathrm{sen}\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Propuesto: Coincidencias temporales y espaciales

Un disco horizontal gira con una velocidad angular constante ω. Desde un cierta altura, se dejan caer bolitas cada τ segundos. En el disco hay N agujeros distribuidos uniformemente.

a) Calcular el valor mínimo de ω (no nulo) para que las bolitas pasen sin chocar con el disco.
b) ¿Con qué velocidad angular debe girar el disco para que las bolitas pasen hoyo por medio?



LECTURAS RECOMENDADAS

- Serway & Jett, Capítulo 4
- Zamorano, Capítulo III