

FI 1001-1: Clase 5 (Resumen)

CONTENIDOS

Velocidad media	1
Ejemplo 1. Velocidad media y gráficos	2
Velocidad instantánea y rapidez	2
Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)	4
Lecturas recomendadas	6

VELOCIDAD MEDIA

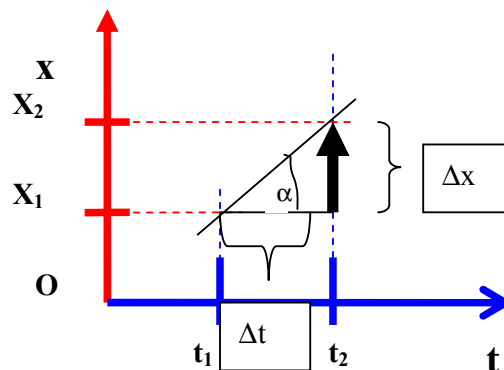
Vimos que el desplazamiento es el cambio de posición de un objeto desde una posición inicial ($\vec{x}_i$) a una posición final ($\vec{x}_f$) y se define operacionalmente como:

$$\vec{D} = \vec{x}_f - \vec{x}_i \equiv \Delta\vec{x}$$

Para un desplazamiento dado se puede definir la tasa en que cambia la posición en el tiempo transcurrido entre un instante inicial t_i y uno final t_f . A esta tasa se la define como **velocidad media** y corresponde a:

$$\vec{V}_{\text{media}} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

La velocidad media es un vector para el cual hay que especificar magnitud y dirección. Su dirección es la misma que la del desplazamiento (paralelo al desplazamiento).



$$|\vec{v}_{\text{media}}| = \left| \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \right| = \tan(\alpha)$$

Gráficamente, la velocidad media se visualiza como el vector cuya magnitud es directamente proporcional a la magnitud del desplazamiento e inversamente proporcional al tiempo transcurrido durante dicho desplazamiento:

Ejemplo 1. Velocidad media y gráficos

Un objeto se mueve con una velocidad constante $v_1 = 20$ m/s durante 20s partiendo desde A, permanece en reposo por 20 s y continúa viaje en la misma dirección con una velocidad de 40 m/s durante otros 20 s, deteniéndose finalmente en un punto que denominamos B.

- Graficar la velocidad media de cada uno de los intervalos versus tiempo.
- Indique la forma del gráfico desplazamiento versus tiempo, para este ejemplo.
- Calcule el valor de la velocidad media entre los puntos A y B de este problema.

La velocidad media sólo informa acerca de la tasa de cambio de la posición (magnitud y dirección) para un intervalo de tiempo dado. Dentro de ese intervalo la tasa de cambio puede haber variado.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y RAPIDEZ

El concepto de velocidad media nos lleva naturalmente a considerar el de velocidad instantánea si tomamos intervalos de tiempo cada vez más pequeños; técnicamente (matemáticamente) decimos intervalos de tiempo infinitesimales. Todo esto se escribe de modo sucinto en matemática diciendo que la **velocidad instantánea** es el límite cuando los intervalos de tiempo entre un instante t y el instante final $t+\Delta t$ tienden a cero de la razón entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo:

$$\bar{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{x}(t + \Delta t) - \bar{x}(t)}{\bar{x}(t + \Delta t) - \bar{x}(t)}$$

Para hacer la notación aún más sucinta se define el concepto de derivada exactamente como dicho límite. De modo que la velocidad instantánea es:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t} \equiv \frac{d\bar{x}}{dt}$$

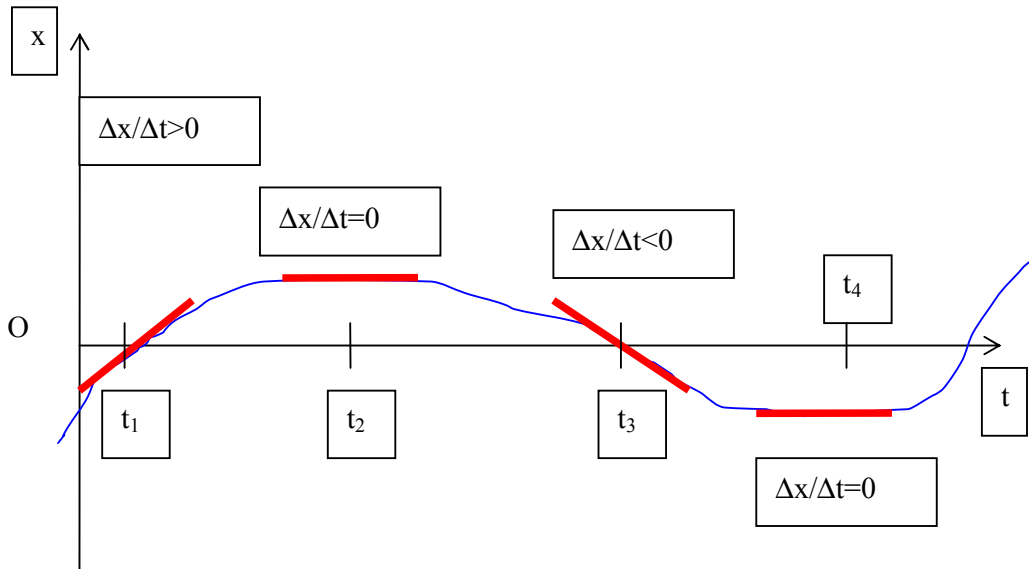
Y a propósito de notación, si indicamos explícitamente que la relación vectorial es a lo largo de la dirección $\hat{X}$ entonces, en esa dirección valdrá la relación entre los módulos o magnitudes. Vale decir, lo anterior también se puede escribir como:

$$\hat{X} : v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$$

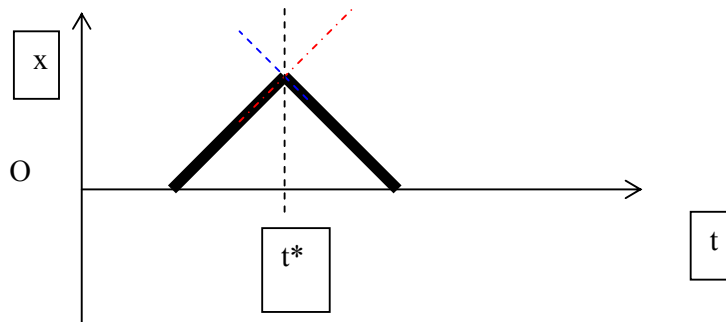
NB. $\hat{X}$ no es necesariamente la dirección de las abscisas en coordenadas cartesianas sino que una dirección cualquiera, un vector unitario en alguna dirección.

Gráficamente, la definición es análoga a la de velocidad media sólo que hay que imaginar intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños. **La velocidad instantánea corresponde a la tangente a la curva definida por las posiciones sucesivas del objeto P.** En la figura, se indican tres instantes y para cada uno de ellos se dibuja la línea tangente a la curva de posición y que corresponde, en el límite, a la velocidad instantánea. En cada lugar se calcula la tangente como la razón entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo infinitesimal. En el instante t_1 la velocidad positiva porque el

desplazamiento es positivo (hacia arriba o a la derecha o la convención elegida). En el instante t_2 no hay desplazamiento y por lo tanto la velocidad es nula. En el instante t_3 el desplazamiento es negativo y así también la velocidad. En el instante t_4 la velocidad es otra vez nula:



Todo lo anterior es cierto en la medida que los cambios en posición no sean “demasiado bruscos”. Matemáticamente se habla de funciones continuas con derivada continua para los cuales se puede definir el límite y/o la derivada. Intuitivamente esto es fácil de ver en la figura siguiente. La línea tangente a la curva de posición es discontinua en el tiempo t^* y allí no se puede definir la derivada de manera unívoca:



Al módulo o magnitud de la velocidad instantánea (y en general al módulo de cualquier velocidad) le llamaremos **rapidez**. Es importante notar que la rapidez sólo nos da la magnitud y no dice nada acerca de la dirección. **La rapidez es una cantidad escalar y la velocidad una cantidad vectorial. Ambas tienen dimensiones de distancia partido por tiempo (L/T).**

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

Hasta el momento hemos visto dos conceptos centrales en cinemática: desplazamiento y velocidad. Eligiendo arbitrariamente una dirección de referencia paralela a la dirección de movimiento tendremos que si la **velocidad es constante** (módulo y dirección) bastará medir la tasa de cambio de la posición en el tiempo sólo una vez para conocerla en todos los tiempos. O sea deberá tenerse que:

$$\hat{x} : v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left. \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|_t$$

y, por lo tanto, evaluando la expresión en un instante de tiempo inicial t_0 para cualquier instante de tiempo posterior t se tendrá:

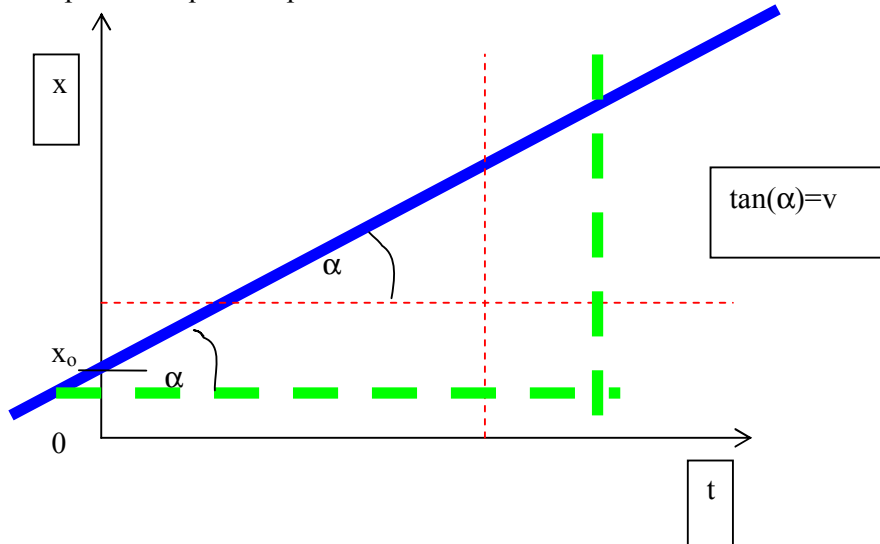
$$\hat{x} : x(t) = x(t_0) + v(t - t_0)$$

Como la velocidad es constante, la dirección del movimiento es siempre la misma y por lo tanto el mismo es rectilíneo.

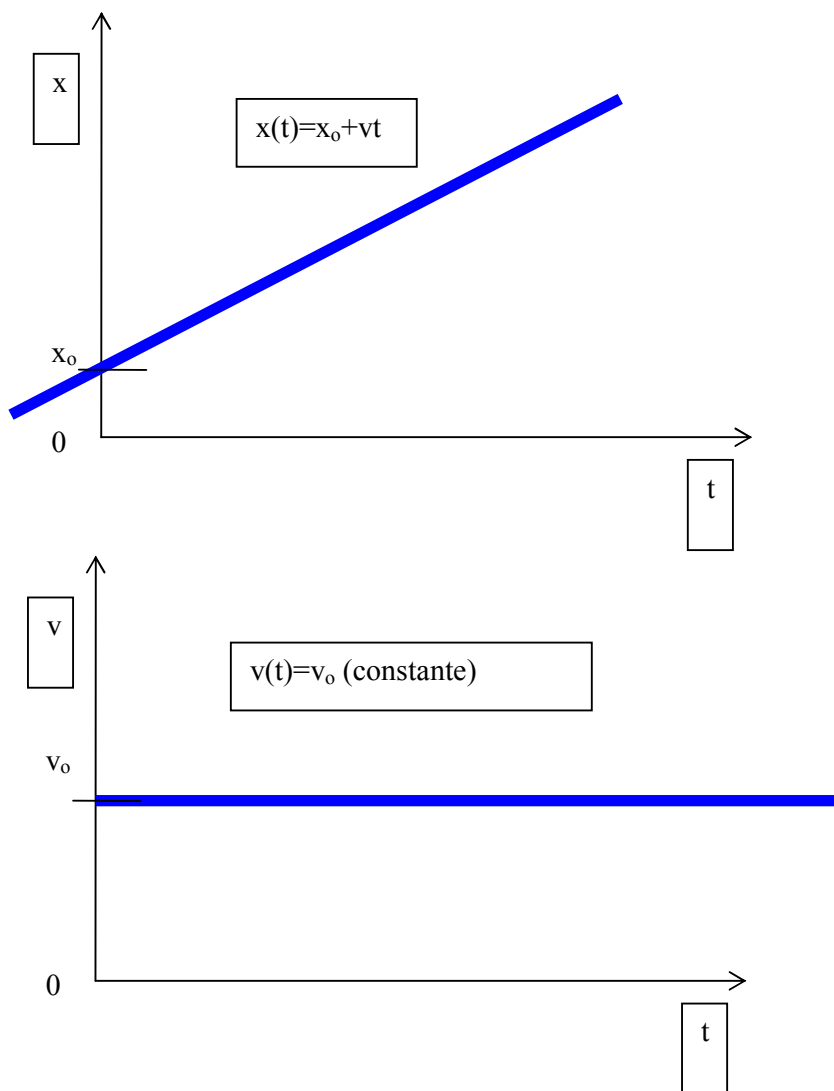
Eligiendo arbitrariamente el instante inicial como nulo ($t_0=0$), es fácil ver que esta expresión corresponde gráficamente a una recta que cruza el eje x en x_0 y que tiene una pendiente v :

$$\hat{x} : x(t) = x(0) + vt = x_0 + vt$$

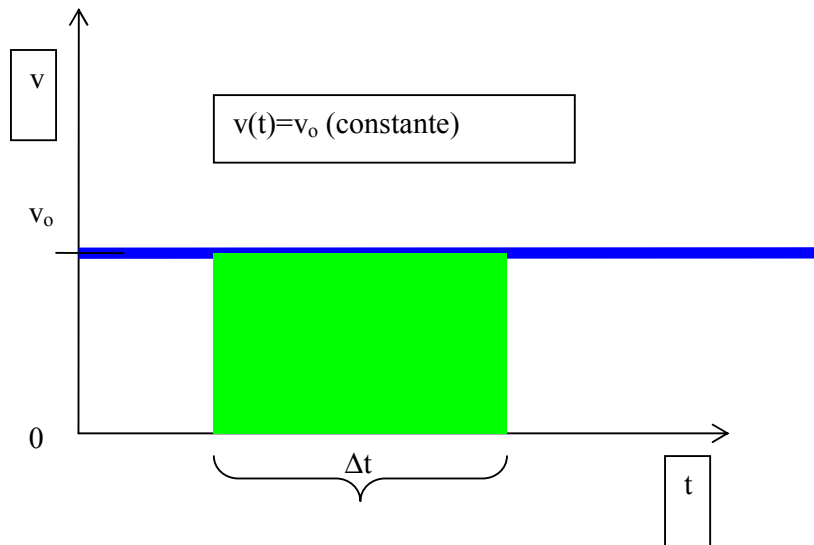
Si suponemos que v es positivo:



Para la situación descrita se tiene que la velocidad es constante en el tiempo y que la posición varía en el tiempo en una tasa constante e igual a la velocidad. Gráficamente:



Además, para un intervalo de tiempo dado Δt , el área bajo la curva del gráfico de rapidez vs. tiempo no dirá la distancia recorrida (sólo la magnitud).



Efectivamente la distancia recorrida corresponde al área del rectángulo verde:

$$\Delta x = v \Delta t$$

NB. ¿Qué pasa si v es negativo? (Notar que las distancias NO pueden ser negativas)

LECTURAS RECOMENDADAS

- Serway & Jett, Capítulo 2
- Zamorano, Capítulo II
- Feynman, Capítulo 8