1. Enunciado ejercicio 2 (Movimiento Planetario)

a) Calcule la desviación, en metros, de la trayectoria de los planetas Venus, Tierra y Júpiter, en su “caída” hacia el Sol durante 1 segundo. (3 puntos)

b) Verique que dichas desviaciones satisfacen una ley de los recíprocos de los cuadrados. Es decir verifique que la distancia caída es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al Sol. (3 puntos)

Use los siguientes datos astronómicos y asuma que las trayectorias de los planetas son circulares.

	Periodo	Distancia al Sol
Venus	0.62 aos	0.723 UA
Tierra	1 ao	1 UA
Jupter	11.86 aos	5.203 UA

Note que la distancia Tierra-Sol (Unidad Astronmica UA) puede ser estimada por Ud. recordando que la luz solar demora 8 minutos en llegar a la tierra.

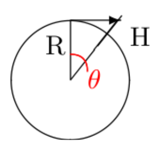
2. Desarrollo

Se requieren los siguientes cálculos previos:

- 1 año $= 365 \times 24 \times 60 \times 60$ [seg] $\approx 3 \cdot 10^7$ [seg]
- 1 UA $=$ Rapidez de la luz $\times\ 8 \times 60$ [seg] = $3 \cdot 10^8$ [m/seg] $\times\ 8 \times 60$ [seg] $\approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ [m]

a) Se calculará la caída para un cuerpo celeste cualquiera. Si llamamos H a la desviación o caída, ella cumple que:

$$\cos(\theta) = \frac{R}{R+H} = \frac{R+H-H}{R+H} = \frac{R+H}{R+H} - \frac{H}{R+H} \approx 1 - \frac{H}{R} \tag{1}$$



Como el ángulo es pequeño, el coseno cumple la aproximación trigonométrica:

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} \tag{2}$$

Igualando los $\cos(\theta)$ de ambas ecuaciones, tenemos:

$$1-\frac{H}{R}=1-\frac{\theta^2}{2}\Rightarrow H=\frac{R\theta^2}{2} \tag{3}$$

Además, el ángulo barrido es proporcional al tiempo, dado que asumimos un movimiento circular uniforme:

$$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1[seg]}{T}\Rightarrow \theta=\frac{2\pi[seg]}{T} \tag{4}$$

Reemplazando esto en (3), tenemos:

$$H=\frac{2R\pi^2}{T^2} \tag{5}$$

Donde R debe estar en metros y T en segundos. Reemplazando ahora los valores de cada planeta:

1. **Tierra:**
$$H_T=\frac{2R_T\pi^2}{T_T^2}=\frac{2\times 1{,}5\cdot 10^{11}\pi^2}{(3\cdot 10^7)^2}\approx 3mm \tag{6}$$

2. **Venus:**
$$H_V=\frac{2R_V\pi^2}{T_V^2}=\frac{2\times 0{,}723\times 1{,}5\cdot 10^{11}\pi^2}{(0{,}62\times 3\cdot 10^7)^2}=\frac{0{,}723}{0{,}62^2}H_T\approx 5{,}5mm \tag{7}$$

3. **Júpiter:**
$$H_J=\frac{2R_J\pi^2}{T_J^2}=\frac{2\times 5{,}203\times 1{,}5\cdot 10^{11}\pi^2}{(11{,}86\times 3\cdot 10^7)^2}=\frac{5{,}203}{11{,}86^2}H_T\approx 0{,}1mm \tag{8}$$

b) Queremos comprobar que el producto $H\cdot R^2$ vale lo mismo para los 3 planetas:

1. **Tierra:**
$$H_T\cdot R_T^2=3mm\cdot R_T^2 \tag{9}$$

2. **Venus:**
$$H_V\cdot R_V^2=5{,}5mm\cdot(0{,}723)^2\cdot R_T^2\approx 2{,}9mm\cdot R_T^2 \tag{10}$$

3. **Júpiter:**
$$H_J\cdot R_J^2=0{,}1mm\cdot(5{,}203)^2\cdot R_T^2\approx 2{,}7mm\cdot R_T^2 \tag{11}$$

Se puede concluir que las distancias satisfacen la ley de los recíprocos cuadrados, dado que los valores anteriores son muy parecidos (no se puede exigir que sean más cercanos dadas las aproximaciones que se han usado).

3. Cosas para recordar en el control

- $\theta\ll 1\Rightarrow \cos(\theta)\approx 1-\frac{\theta^2}{2}$
- $\theta\ll 1\Rightarrow \sin(\theta)\approx\theta$