



Materia de esta Guía de Gravitación:

- Órbitas: Circulares y elípticas.
- Energía y Momento angular
- Centro de masa.
- Superposición.

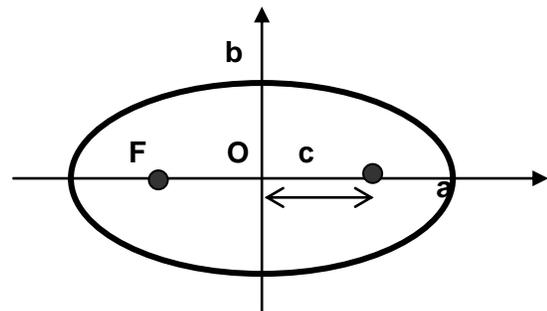
1. En el lanzamiento de un objeto a baja altura, (la altura es pequeña comparada con el radio de la Tierra), se puede aproximar la atracción gravitacional como constante. De aquí se obtiene el valor de la aceleración constante $g = 10 \text{ m/s}^2$. Cuando uno se aleja de la superficie terrestre a una altura mayor, esta aproximación pierde validez y, de acuerdo a la ley de Gravitación Universal de Newton, la magnitud de la aceleración de gravedad decrece inversamente con el cuadrado de la distancia r . Su variación queda expresada como:

$$g(r) = \frac{C}{r^2} \quad \text{con } C = 4.0 \times 10^{14} \text{ m}^3 / \text{s}^2$$

Se sabe también que para que un satélite artificial pueda mantenerse en una órbita circular de radio r , con motores apagados, es necesario que su aceleración centrípeta sea igual a la aceleración de gravedad en esa órbita. En esa condición se pide,

- calcular el radio de la órbita circular de un satélite artificial que gira en el plano ecuatorial y que permanentemente está ubicado sobre el mismo punto de la superficie terrestre (satélite geoestacionario).
- ¿Cuál es la razón entre la velocidad tangencial de un satélite artificial que describe una órbita circular a cien kilómetros sobre la superficie terrestre y la velocidad tangencial de un satélite geoestacionario?

2. La Figura representa la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol que ocupa el foco F . Si en la elipse las cantidades a y b representan el respectivamente el valor del semieje mayor y menor, y c designa la distancia del origen de coordenadas O a un foco, demuestre que se cumplen las siguientes relaciones:



$$V_P / V_A = (a + c) / (a - c), \quad \text{y} \quad a V_P V_A = GM_o,$$

donde se conoce: la masa del Sol, M_o , la masa del planeta m , la constante de gravitación universal G , las distancias a y c y las velocidades V_A y V_P , del planeta en el afelio y en el perihelio respectivamente.

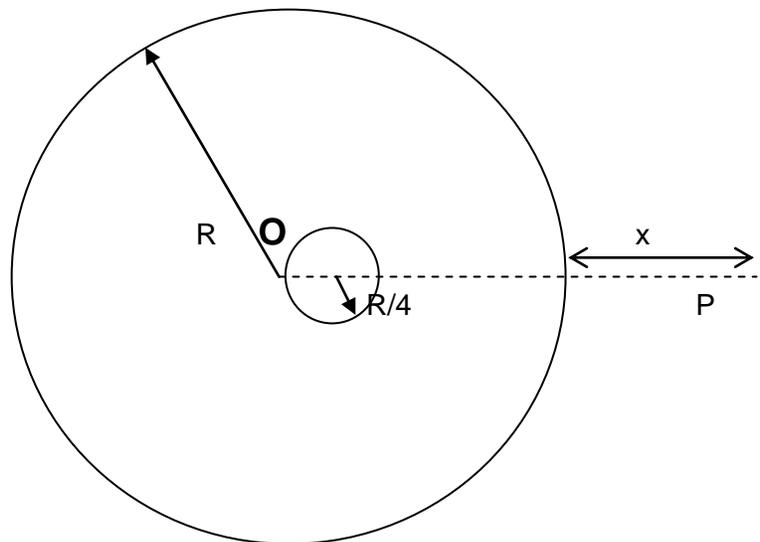
Nota: Se recomienda utilizar la excentricidad de la órbita e , en lugar del valor de c que se indica en la respuesta.

3. Dos partículas de masa M y m están inicialmente separadas por una distancia muy grande que para efectos prácticos la consideramos infinita. Si estas dos masas se dejan libres, la fuerza de atracción gravitacional comienza a acercarlas. Demuestre que cuando están separadas una distancia D entre ellas, la velocidad relativa de acercamiento es :

$$V = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{D}}$$

4. Un satélite gira alrededor de la tierra en una trayectoria circular, cuyo radio es $2R_0$ donde R_0 es el radio terrestre.
- Encuentre el período en horas del satélite en su órbita circular.
 - Suponga ahora que el satélite, con la ayuda de un pequeño cohete, se acelera (en forma instantánea) de manera que la velocidad se incrementa de v_0 a αv_0 con alfa mayor que uno. Siendo la nueva trayectoria elipsoidal. (El impulso que recibe el satélite es en la misma dirección en la que se estaba moviendo). Encuentre la distancia del apogeo del satélite en función de los datos y alfa, las masas son conocidas. Nota: el apogeo es el punto de la órbita en que el satélite se encuentra a mayor distancia de la tierra. La distancia menor se denomina perigeo.
 - ¿Cuál es el valor mínimo de alfa para que el satélite pueda escaparse hacia el infinito?
5. Considere un casquete esférico muy delgado, de densidad uniforme, de radio R y masa M que posee dos orificios que lo perforan en posiciones diametralmente opuestas. Una masa puntual m se encuentra a una distancia $3R$ de su centro sobre la línea que une las perforaciones.
- Calcule el trabajo que realiza la fuerza de gravedad sobre la masa m para desplazarla desde el punto inicial hasta la superficie del casquete (magnitud y signo).
 - Calcule el tiempo que demora la masa m en cruzar el casquete de un extremo al otro.
 - ¿Qué ocurre si las masas son comparables y no se puede considerar que m sea pequeña con respecto a M ?
6. El 7 de noviembre de 1996, la NASA envió al planeta Marte el Mars Global Surveyor (MGS). Su misión: explorar su atmósfera y otras características del planeta. Suponga que el MGS describe una órbita circular alrededor de Marte.
- Si el radio de Marte es R , la aceleración de gravedad sobre su superficie es g y la altura del satélite sobre la superficie del planeta es h , encuentre la velocidad orbital del MGS en función de R , g y h .
 - Aunque la misión no considera esta opción, suponga que se desea pasar rasante a la superficie de Marte con el MGS. Para lograr este objetivo, la sonda enciende sus cohetes para frenar su velocidad tangencial en el punto A de su órbita circular, de modo que la trayectoria posterior resulte en una elipse. Determinar la velocidad en A inmediatamente después que los cohetes de freno han sido activados. Encuentre también la velocidad en el punto B. Nota : utilice la conservación del momentum angular y de la energía entre los puntos A y B.

7. Dos satélites idénticos se lanzan desde el polo norte de la tierra. La masa de la Tierra la denominamos M y su radio R . Uno de ellos se lanza verticalmente y alcanza una altura máxima $2R$ medida desde el centro de la tierra. El otro satélite se lanza tangencialmente y en el punto que alcanza su altura máxima se encuentra a una distancia $4R$ del centro de la tierra. Calcule la velocidad de lanzamiento de cada satélite.
8. Un satélite de masa m orbita alrededor de la tierra (de masa M) describiendo una circunferencia, con una rapidez v_0 . En cierto instante se eyecta, tangencialmente y hacia el frente del satélite parte de su masa, λm , con λ por determinar. La maniobra se realiza con el objeto de dejar el resto del satélite detenido, de modo que caiga radialmente a la tierra. La maniobra debe ser lo más rápido posible, pero que garantice que la porción lanzada hacia delante abandone el campo gravitacional terrestre. Determine el valor de la energía con que debe escapar la porción λm del satélite y el valor de λ para que la parte restante caiga radialmente a tierra.
9. Un planeta de masa m describe una órbita circular de radio R en torno al sol, de masa M . Un cometa de masa αm , también orbita en torno al sol en el mismo sentido del planeta, describiendo una órbita elíptica, con su perihelio coincidente con R y su afelio $4R$. Cálculos astronómicos indican que en un futuro cercano el cometa chocará con el planeta. Para este preocupante escenario, se pide lo siguiente:
- Determine la velocidad del planeta (v_p) justo antes del choque.
 - Determine la velocidad del cometa (v_c) justo antes del choque.
 - Si el choque es plástico, determine la velocidad del sistema planeta-cometa después de la colisión.
 - Determine el valor del afelio de la órbita del sistema planeta-cometa.



10. Encuentre la aceleración de gravedad que experimenta una partícula ubicada en un punto P , situado a una distancia x , de la superficie de una esfera de masa M , que tiene una cavidad esférica de radio $R/4$ y cuyo centro está situado a una distancia $R/4$, del centro de la esfera. La densidad de masa de la esfera es ρ_0 , y el punto P , el centro de la esfera O y el de la cavidad están alineados.

11. Encuentre la ley de Kepler modificada que relaciona el período de la órbita con su radio para el caso de dos masas m y M orbitando una alrededor de la otra describiendo, ambas, una circunferencia con respecto al centro de masa del sistema.

12.

- Demuestre que la aceleración de gravedad g , está determinada por la ley de Gravitación Universal de Newton de la siguiente forma: $g = GM_T/R_T^2$, donde M_T es la masa de la Tierra $=6 \times 10^{24}$ kg y $R_T = 6.447$ km
- ¿Cuál es el período de un péndulo en la superficie de la Luna, si el período del mismo péndulo en la superficie de la Tierra, es de 2 segundos? (El período de un péndulo es proporcional a la raíz cuadrada de l/g)
- ¿Qué valor debe tener la velocidad de lanzamiento de un satélite situado en una estación espacial a una altura de 161 km sobre la superficie de la Tierra? Suponga que la Tierra no rota y que la masa de la plataforma de lanzamiento es mucho mayor que la del satélite, de modo que no se ve afectada su movimiento por este lanzamiento. El satélite se ejecta en forma horizontal para que siga una órbita circular alrededor de la Tierra ¿Cuál será su período de rotación? ($R_T = 6.447$ km.)

Radio de la Luna = $1,74 \times 10^6$ m, Masa de la Luna = $7,35 \times 10^{25}$ g, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Newton m^2 kg^{-2}
 $[G M_{SOL}] / c^2 = 1,475$ km $c = 300.000$ km/s

13. Una masa m se sujeta a una cuerda que pasa por un pequeño orificio en una mesa sin fricción.

Al inicio, la masa se mueve en un círculo de radio r_0 con velocidad V_0 . Luego, se tira lentamente de la cuerda por la parte de abajo, disminuyendo el radio del círculo hasta un radio r .
 ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando el radio es r ?

Determine la tensión en la cuerda en función de r .
 Calcule el trabajo que se realiza al mover m desde r_0 hasta r .

