



En la Figura aparece Daniel Bernoulli (1700-1782). Es el autor de la ecuación que lleva su nombre y que representa la conservación de la energía en un fluido. Fue uno de los matemáticos más destacados que abordó problemas físicos, como la vibración de vigas y cuerdas donde mantuvo una controversia con su amigo L. Euler. Ambos fueron compañeros y amigos en la Universidad de Basilea. Su padre, su hermano y un primo fueron todos matemáticos destacados. Estudió medicina y dentro de dicha especialidad se dedicó a la fisiología. Ganó 10 premios de la Academia de Ciencias de París siendo sólo superado por L. Euler que recibió 13.

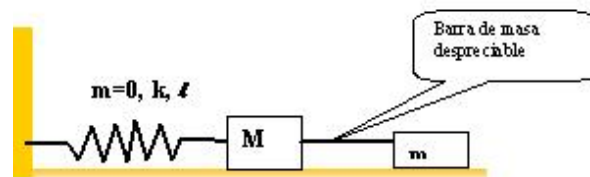
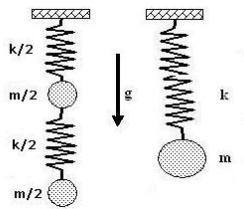
GUÍA # 7

Problema # 1

Se propone un modelo simple para considerar el efecto de la masa de un resorte en su comportamiento. Considere que el resorte tiene una masa m , un largo natural L_0 y una constante de rigidez k . Se propone un modelo algebraico que reemplaza la masa total por N masas iguales, que suman la masa total y que están distribuidas uniformemente a lo largo del resorte.

Si el resorte se cuelga desde uno de sus extremos, estime el alargamiento de su extremo inferior debido al efecto de su masa no nula. Para hacer la estimación, se sugiere proceda por aproximaciones sucesivas: compare el caso donde concentramos toda la masa del resorte en el extremo inferior con la configuración en que la masa está distribuida en tramos iguales a lo largo del resorte, por ejemplo dividida en tres masas iguales. Si puede, a partir de este resultado aventure una expresión para el caso de una división de N masas iguales.

Para el caso de tres masas, haga un gráfico del alargamiento de cada tramo, partiendo desde el tramo superior, el que está unido al techo.



Problema # 2

Considere el oscilador armónico ideal (sin masa, k y largo natural ℓ_0) de la Figura. La masa M y m están unidas por una barra cuya masa es despreciable comparada con cualquiera de las anteriores. El plano no tiene roce. Si la solución general de este problema es $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$.

a.- Encuentre la amplitud, la fase y el período de oscilación de este péndulo si:

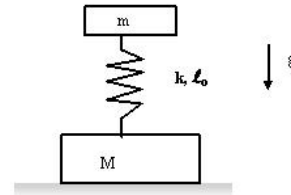
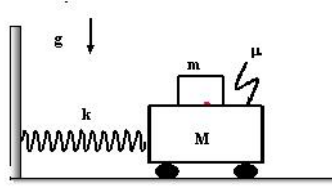
i.- Con el oscilador en reposo sobre la mesa, se le comunica una velocidad v_0 a la masa M

ii.- Indique tres formas diferentes de iniciar el movimiento de este oscilador de manera que oscile igual al caso anterior. Esto quiere decir que tenga la misma amplitud A y fase ϕ_0 , pero a partir de condiciones iniciales diferentes.

b.- Explique en palabras, breve y claramente, ¿Qué sucedería si en lugar de tener una barra uniendo ambas masas, existiera un hilo. (No necesita resolver nuevamente el problema, sólo debe mirar las nuevas ecuaciones y comentarlas).

Problema # 3

En la configuración de la Figura, el carrito oscila, atado por un resorte a la pared. Considere el roce despreciable en todos los puntos de contacto, excepto en la superficie de contacto de las dos masas señaladas. El resorte tiene constante k . Si el coeficiente de roce entre los bloques es μ , determine la amplitud máxima de oscilación del sistema para la cual la masa superior m está a punto de resbalar sobre M .



Problema # 4

Dos masas M y m , están unidas por un resorte de largo natural ℓ_0 y constante k . Permanecen en posición vertical como se indica en la Figura. Cuando el sistema está en reposo,

a.- ¿Cuál es la reacción del piso sobre M ?

b.- ¿Cuánto se acortó el resorte debido al peso de m ?

c.- ¿Cuánto debo hundir la masa m para lograr levantar la masa M del piso?

d.- Suponga que invierto el sistema, la masa m queda bajo la masa M . ¿Cuánto debo hundir la masa M para que el sistema de las dos masas esté a punto de levantarse del piso.

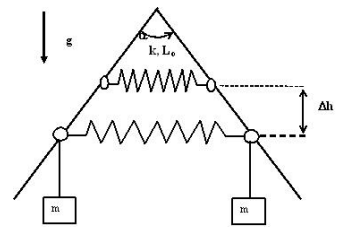
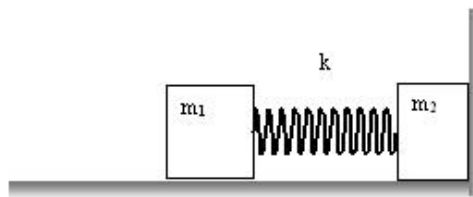
Problema # 5

Dos masas distintas $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, descansan sobre una mesa sin roce, con m_2 pegado a la pared. Un resorte de constante k se instala entre las dos masas y se comprime una distancia d . Si el sistema es abandonado desde el reposo, en esa condición, encontrar qué distancia viaja m_1 antes de desligarse del resorte. ¿Qué velocidad lleva en ese instante.

¿Qué sucede si el sistema se invierte de modo que la masa m_1 queda pegada a la muralla. ¿Cambia el resultado?

Problema # 6

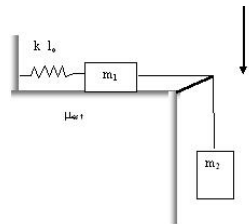
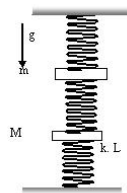
Un alambre tiene forma de V invertida. Mediante unos anillos sin roce se instala un resorte de largo natural L_0 y constante k . De estos mismos anillos se cuelgan dos masas idénticas m , como se señala en la Figura. Si estas masas se depositan suavemente, el alambre se alarga y baja hasta alcanzar una posición de equilibrio. Dado los valores: del ángulo



superior α , k , m , L_0 y g . Encuentre el valor de h .

Problema # 7

Se tiene un sistema de dos masas m y M , puntuales, que están colgadas verticalmente de la forma que indica la figura. Si los resortes son iguales y cada uno tiene un largo L y constante de rigidez k , encuentre a qué distancia de la superficie superior se ubica cada una de las masas. Las masas están en reposo. Para comprobar su resultado, haga $m=0$, y compruebe la respuesta anterior. Calcule lo mismo en el caso que $M=0$.



Problema # 8

En el sistema de la Figura, las dos masas m_1 y m_2 están unidas por una cuerda ideal. Además, m_1 está unida a la pared mediante un resorte de masa despreciable, constante k y largo natural ℓ_0 .

a.- Suponga que en el instante inicial ambas masas están en reposo y el resorte mantiene su largo natural. Si el roce entre el piso y la masa m_1 es despreciable, encuentre cuánto baja la masa m_2 a partir de su posición inicial (aquella donde el resorte tiene su largo natural) cuando la suelta muy lentamente, de manera que el sistema no oscila.

b.- Considere ahora la misma situación anterior (parte a)) pero ahora consideramos el roce entre la masa m_1 y el piso. Encuentre el valor mínimo que debe tener el coeficiente de roce estático μ_{est} para el cual el sistema de masas permanece sin moverse al soltar m_2 (Note que el resorte permanece en su largo natural). ¿Depende de la constante del resorte? Explique.

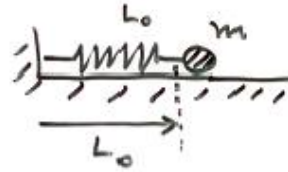
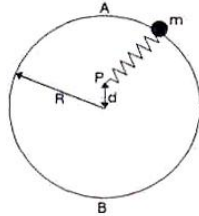
c.- Considere la misma situación de la parte a.-: una persona sostiene la masa m_2 de modo que todo el sistema permanece en reposo y el resorte mantiene su largo natural. Ahora, en $t=0$, repentinamente la persona suelta la masa m_2 . Calcule el máximo estiramiento del resorte (o lo que es lo mismo, cuánto baja m_2) y el período con que oscila este sistema.

Problema # 9

Una partícula de masa m que se desliza sin roce sobre un anillo de radio R se libera en el punto A. El anillo, que permanece fijo, está unido a un resorte de constante k , cuyo otro extremo está fijo al punto P, ubicado a una distancia d del centro del anillo. Para simplificar los cálculos, suponga que el largo natural del resorte es despreciable comparado con

los otros largos. Desprecie también el efecto de la aceleración de gravedad. Si la partícula inicia el movimiento desde el punto **A**, con velocidad inicial nula, y al pasar por el punto **B**, no ejerce ninguna fuerza sobre el aro, calcule el valor de la distancia **d**. ¿Puede alcanzar **d** un valor nulo o negativo? Explique.

Si un compañero afirma que este problema es el mismo que aquel de un oscilador que inicialmente está alargado una distancia **R-d** y que en el otro extremo de la oscilación está alargado una distancia **R + d**, y que además todo eso del movimiento en la circunferencia no significa nada puesto que no hay roce ni el resorte tiene masa...¿Ud. le creería? En caso que no le crea: ¿cómo le contra-argumentaría?



Problema # 10

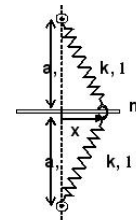
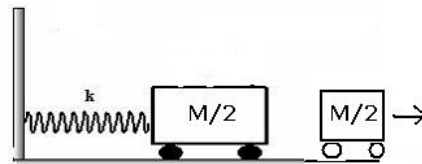
Calcule cuánto tarda la masa **m** en completar un ciclo, si permanece unida firmemente a un resorte que tiene una rigidez k_1 para la compresión y una rigidez $k_2 < k_1$ para la elongación.

Problema # 11

Analice el caso del oscilador armónico horizontal que se describe a continuación. Se tiene una masa **M** unida a un resorte de constante de rigidez **k** y largo natural L_0 . Inicialmente el resorte se comprime una distancia Δ a partir del largo natural y se suelta. Al llegar al punto de equilibrio la mitad de la masa **M** se desprende suavemente y sigue desplazándose con velocidad constante en el piso sin roce. El resorte llega a su máxima elongación, se contrae, se expande y nuevamente al llegar al punto de equilibrio se desprende la mitad de la **masa restante** (por ejemplo, $M/4$, en el segundo desprendimiento), que sigue propagándose con velocidad constante en el piso sin roce.

Y así sucesivamente.

Analice este movimiento y describa su comportamiento.



Problema # 12

En el sistema de la figura aparecen dos resortes idénticos unidos en el extremo común por un anillo de masa **M**. este anillo se puede deslizar sin roce a lo largo de la barra horizontal. No considere el peso del anillo.

- Encuentre el punto de equilibrio (el valor de x) del sistema de resortes para los casos
 - $\ell < a$,

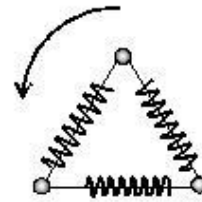
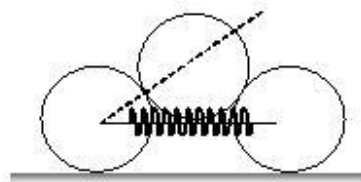
- ii.- $\ell = a$,
- iii.- $\ell > a$.

b.- ¿Puede encontrar la frecuencia angular ω para el caso de pequeñas oscilaciones en cada uno de los casos? Note que basta escribir la ecuación de movimiento para conocerla.

Use la aproximación $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \alpha/2$ si $\alpha < 1$.

Problema # 13

Los tres cilindros de la figura tienen todos la misma masa M y radio R . El largo natural del resorte, de constante de rigidez k , es $2R$ y sus extremos se ubican entre los dos ejes de los cilindros que están sobre el piso. Si el cilindro superior se deposita *lentamente*, evitando que aparezcan oscilaciones, el resorte se estira hasta que la recta que une el eje del cilindro superior con el de la base, forma un ángulo θ . Escriba las ecuaciones de equilibrio de este sistema. Indique cómo resolvería este problema.



Problema # 14

Tres resortes idénticos de rigidez k y largo natural L , se unen formando un triángulo equilátero. En cada uno de los vértices de este triángulo se instala una masa m . El sistema se ubica sobre una superficie plana sin roce y se hace girar sobre ella hasta alcanzar una velocidad angular constante ω . Encuentre el nuevo valor que toma el lado del triángulo en estas condiciones.

Note que debido a la simetría, la nueva figura es también un triángulo equilátero.

Problema # 16

Una masa M puede deslizarse sobre un plano inclinado con un ángulo θ con roce despreciable. La masa está atada a un resorte de constante de rigidez k y largo natural ℓ_0 , mediante una cuerda de largo L .

- a.- Se suelta lentamente la masa en el extremo libre de la cuerda. Encuentre la posición de equilibrio de la masa M . (Refiera este punto a la posición inicial sin elongación del resorte).
- b.- Estando en esta nueva posición de equilibrio, se le imparte una rapidez V_0 hacia la parte superior del plano inclinado. Encuentre la amplitud de oscilación de la masa M .
- c.- ¿Cuál es la máxima rapidez V_0 que se le puede comunicar a la masa M sin que la cuerda se arrugue?
- d.- ¿Cuál es la frecuencia angular de este resorte? ¿Depende del ángulo θ ?

