Pauta Pregunta 3 Control 3

Prof. Nicolás Mújica

Aux. E. Quintana, G. Castillo, N. Rivas

Un cuerpo de masa m es soltado sobre un plano inclinado desde una altura h. El extremo inferior del plano inclinado empalma con un plano horizontal donde se encuentra un resorte ideal no elongado (con una placa de masa despreciable) de constante k y longitud natural L, como se indica en la figura. Considerando que hay roce cinético y estático a lo largo de toda la trayectoria μ_e y μ_c respectivamente. Calcule el coeficiente de roce estático para que la masa se quede detenida en la posición de compresión máxima del resorte.

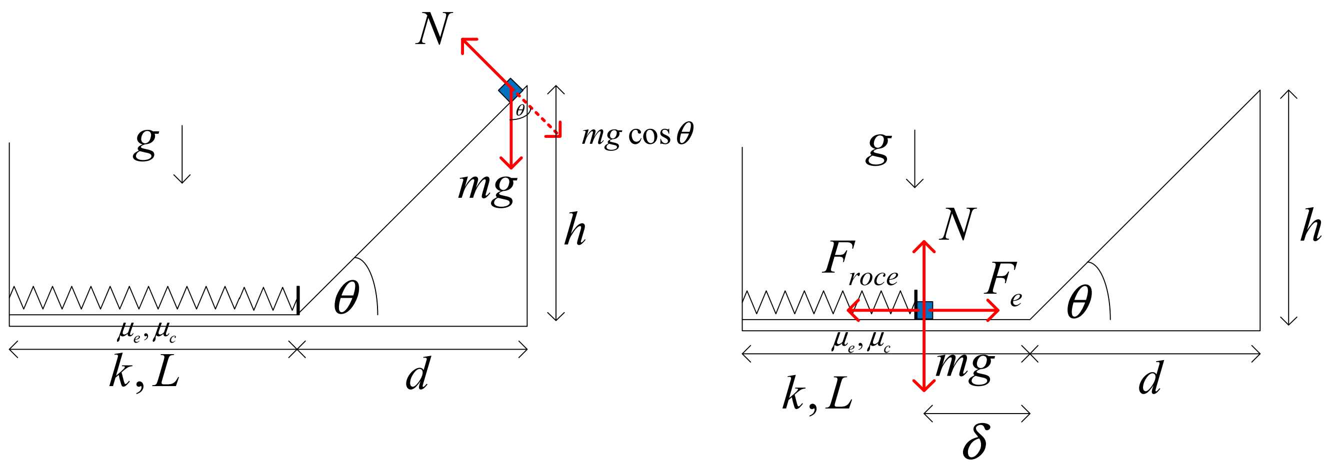

Figura 1

Primero se calcula la velocidad con la que llega el cuerpo cuando choca con la placa. Para ello se utilizará energía.

Así:

$$\Delta E = W_{dis}$$

Realizando DCL sobre la masa, es fácil observar que $N = mg\cos\theta$. Además es directo ver que $E_i = mgh$ y que $E_f = \frac{1}{2}mv^2$. Finalmente se tiene que:

$$W_{dis} = -F_{roce} \cdot desplazamiento = -\mu_c N \cdot \sqrt{h^2 + d^2} = -\mu_c mg\cos\theta\sqrt{h^2 + d^2}$$

Pero del dibujo $\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}$. Así:

$$W_{dis} = -\mu_c mgd$$

Luego, reemplazando:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = -\mu_c mgd$$

$$v^2 = 2gh - 2\mu_c gd = 2g(h - \mu_c d)$$

Cuando la masa llega al plano horizontal cambia la normal. Así, para encontrar la compresión máxima del resorte, tenemos que en esta situación la velocidad es cero (o sino el resorte se seguiría comprimiendo y no sería compresión máxima). De esta manera:

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}k\delta^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu_c mg\delta = W_{dis}$$

Así, despejando la compresión máxima δ:

$$\delta^2 + 2\mu_c \frac{mg}{k}\delta - \frac{mv^2}{k} = 0$$

$$\delta^2 + 2\mu_c \frac{mg}{k}\delta - 2\frac{mg(h - \mu_c d)}{k} = 0$$

Si llamamos $\frac{mg}{k} = \Delta$, entonces la ecuación queda:

$$\delta^2 + 2\mu_c\Delta\delta - 2\Delta(h - \mu_c d) = 0$$

Así:

$$\delta = -\mu_c\Delta \pm \sqrt{(\mu_c\Delta)^2 + 2\Delta(h - \mu_c d)}$$

Finalmente realizando un balance de fuerzas, se tiene que $F_{roce} = F_e = k\delta$. Además $N = mg$. Por esta razón:

$$F_{roce} = k\delta \leq \mu_e N$$

Despejando se tiene que:

$$k\left(-\mu_c\Delta + \sqrt{(\mu_c\Delta)^2 + 2\Delta(h - \mu_c d)}\right) \leq \mu_e mg$$

$$\frac{k}{mg}\left(-\mu_c\Delta + \sqrt{(\mu_c\Delta)^2 + 2\Delta(h - \mu_c d)}\right) \leq \mu_e$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(-\mu_c\Delta + \sqrt{(\mu_c\Delta)^2 + 2\Delta(h - \mu_c d)}\right) \leq \mu_e$$

$$\left(-\mu_c + \sqrt{\mu_c^2 + \frac{2(h - \mu_c d)}{\Delta}}\right) \leq \mu_e$$

$$\sqrt{\mu_c^2 + \frac{2k(h - \mu_c d)}{mg}} - \mu_c \leq \mu_e$$