

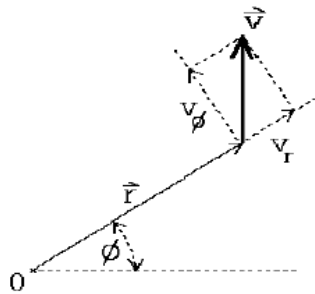
Potencial Efectivo:

Primero que todo, la gracia del potencial efectivo (o más bien, de reformular de esa forma la definición de energía) es que permite transformar el problema bidimensional en uno unidimensional:

Sabemos que la energía viene dada por:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Descompongamos la velocidad en una componente radial (v_r , que apunta hacia el cuerpo generador de la fuerza central) y otra tangencial (v_ϕ), perpendicular a la anterior.



Es claro entonces que:

$$v^2 = v_r^2 + v_\phi^2$$

Luego:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_r^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\phi^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Sigue siendo un problema bidimensional, pues están involucradas variables tanto en ϕ como en r .

Pero por otro lado:

$$l = r \cdot m \cdot v_\phi \rightarrow v_\phi = \frac{l}{r \cdot m}$$

De esta forma nos podemos deshacer de las variables en ϕ .

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_r^2 + \frac{l^2}{2 \cdot m \cdot r^2} - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Y este es un problema unidimensional. Si se define:

$$U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2 \cdot m \cdot r^2} - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

(Notar que U_{eff} sólo depende la distancia entre el cuerpo generador de la fuerza central y el satélite, es decir, de r)

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_r^2 + U_{eff}(r)$$

La idea es que ahora podemos re-interpretar el problema como uno en una dimensión (dada por r), donde una partícula se mueve en presencia de un potencial efectivo $U_{eff}(r)$

(Por ejemplo, cuando lanzas un objeto verticalmente, tienes la fórmula $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$ que permite relacionar la velocidad con la posición (altura). La diferencia es que ahora el potencial es $U_{eff}(r)$ y no $m \cdot g \cdot h$)

El potencial efectivo, a mi modo de ver, no es más que una herramienta para simplificar un problema, pues ahora, conociendo el valor de todas las constantes involucradas (E, l, m, M, G) puedo relacionar fácilmente r y v_r .

Por otro lado, nos permite obtener los r críticos, es decir, la distancia satélite-astro mínima y/o máxima, y a partir de ellas, cómo es la órbita. Es claro que en tales radios críticos $v_r = 0$.

Luego, en los **radios mínimos y máximos**:

$$E = U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2 \cdot m \cdot r^2} - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

$$r^2 \cdot (2 \cdot E \cdot m) + r \cdot (2 \cdot G \cdot M \cdot m^2) - l^2 = 0$$

Ahora analizamos por casos (más detallado en Massman):

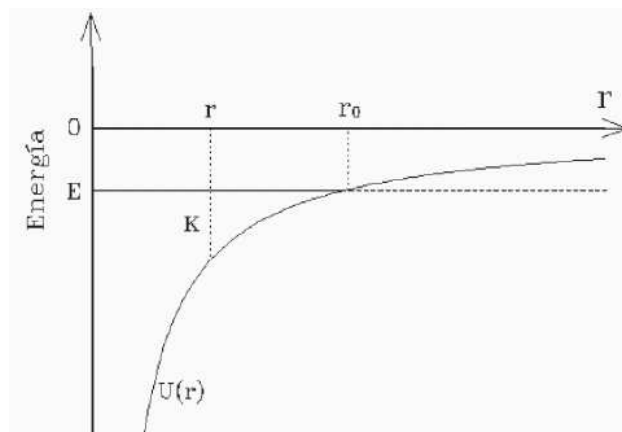
1) $l = 0$

Como toda la formulación previa fue hecha, implícitamente con $r \neq 0$. No tiene sentido físico tomar $r = 0$ como solución de la cuadrática, Entonces:

$$r^* = - \frac{G \cdot M \cdot m}{E}$$

Forzosamente $E < 0$ y el radio corresponderá a un máximo.

(La partícula solo se desplaza en la dirección radial y no puede superar la distancia r^* hacia el cuerpo generador de la fuerza central)



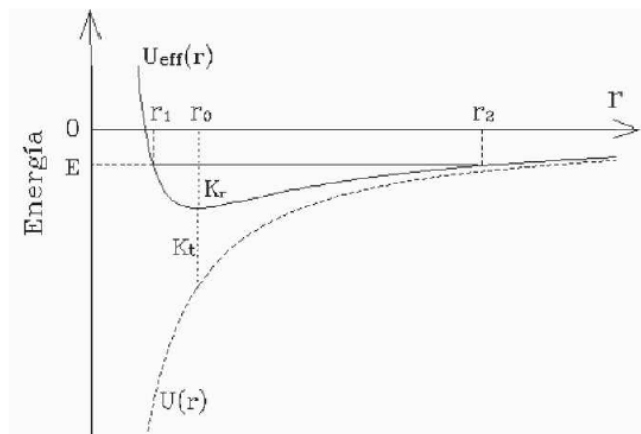
2) $l \neq 0$

Se tiene:

$$r = \frac{-2 \cdot G \cdot M \cdot m^2 \pm \sqrt{(2 \cdot G \cdot M \cdot m^2)^2 + 8 \cdot (E \cdot m \cdot l^2)}}{4 \cdot E \cdot m}$$

2.1) Si $E < 0$, la ecuación tiene dos soluciones mayores a cero. Que corresponderán al radio máximo y mínimo (apogeo y perigeo). La órbita será una elipse. Ahora bien, si ambos radios coinciden, la órbita será una circunferencia.

2.2) Si $E > 0$, la ecuación tiene dos soluciones, una mayor que cero y otra menor que cero. Luego, sólo nos sirve una (la que es mayor a cero), que corresponderá a un mínimo de la órbita. La órbita descrita será una hipérbola, cuyo punto más cercano al cuerpo generador de fuerza central será en el radio mínimo encontrado a partir de la ecuación cuadrática, y luego se alejará indefinidamente (no tiene radio máximo).



(Notar que si $E > 0$, una solución para $r > 0$; y si $E < 0$, dos soluciones)