Pauta Pregunta 3 – Control Recuperativo

Un disco de radio R gira con velocidad angular ω. Una hormiga viaja abrazada al borde de este disco.

a) Para qué valor de θ debe soltarse la hormiga para caer justo en el punto simétrico (con respecto a la vertical) del disco. (θ: ángulo entre la hormiga y la vertical en el momento en que se suelta). (4,0)

Ecuaciones de movimiento (1,5):

Se define el origen del sistema de coordenadas en el lugar en que la hormiga se suelta de la rueda, el eje x paralelo a la horizontal, y el eje y paralelo a la vertical.

Luego, si se define t=0 cuando la hormiga se suelta de la rueda, la velocidad inicial de la hormiga estará determinada únicamente por la velocidad tangencial en ese instante, y la aceleración sólo se presentará en el eje y (aceleración de gravedad). Separando el movimiento de acuerdo a cada eje, tenemos:

$Eje\ x$:

$r_{ox} = 0$

$v_{ox} = v_o \cdot \cos(\theta) = \omega \cdot R \cdot \cos(\theta)$

$a_x = 0$

$r_x(t) = \omega \cdot R \cdot \cos(\theta) \cdot t$

$v_x(t) = \omega \cdot R \cdot \cos(\theta)$

$Eje\ y$:

$r_{oy} = 0$

$v_{oy} = v_o \cdot \sin(\theta) = \omega \cdot R \cdot \sin(\theta)$

$a_y = -g$

$r_y(t) = \omega \cdot R \cdot \sin(\theta) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = t \cdot \left(\omega \cdot R \cdot \sin(\theta) - \frac{g}{2} \cdot t\right)$

$v_y(t) = \omega \cdot R \cdot \sin(\theta) - g \cdot t$

Establecer condiciones (1,5):

Los dos caminos más utilizados fueron:

a) Como el punto de caída es simétrico con respecto a la vertical, utilizando trigonometría podemos obtener:

$$r_x(t^*) = 2 \cdot R \cdot sin\theta$$
$$r_y(t^*) = 0$$

b) La velocidad en y en la mitad del trayecto será cero. Luego es fácil despejar el tiempo de viaje.

$$v_y\left(\frac{t^*}{2}\right) = 0$$

Para imponer este valor en la primera ecuación de a).

Despejar t^* (0,5) y encontrar una expresión para $\boldsymbol{\theta}$ (0,5)

a)

$$r_x(t^*) = 2 \cdot R \cdot sin\theta = \omega \cdot R \cdot \cos(\theta) \cdot t^*$$
$$t^* = 2 \cdot \frac{tg(\theta)}{\omega}$$
$$r_y(t^*) = 0 = t^* \cdot \left(\omega \cdot R \cdot \sin(\theta) - \frac{g}{2} \cdot t^*\right)$$
$$(Como\ la\ solución\ \ t^* = 0\ \ no\ nos\ interesa)$$
$$0 = \left(\omega \cdot R \cdot \sin(\theta) - \frac{g}{2} \cdot t^*\right)$$
$$\omega \cdot R \cdot \sin(\theta) = \frac{g}{2} \cdot t^* = \frac{g}{2} \cdot 2 \cdot \frac{tg(\theta)}{\omega}$$
$$\cos(\theta) = \frac{g}{R \cdot \omega^2}$$

b)

$$v_y\left(\frac{t^*}{2}\right) = 0 = \omega \cdot R \cdot \sin(\theta) - g \cdot \left(\frac{t^*}{2}\right)$$
$$t^* = 2 \cdot \omega \cdot R \cdot \frac{\sin(\theta)}{g}$$

$$r_x(t^*) = 2 \cdot R \cdot sin\theta = \omega \cdot R \cdot \cos(\theta) \cdot t^* = \omega \cdot R \cdot \cos(\theta) \cdot 2 \cdot \omega \cdot R \cdot \frac{\sin(\theta)}{g}$$

$$2 \cdot R \cdot sin\theta = \omega \cdot R \cdot \cos(\theta) \cdot 2 \cdot \omega \cdot R \cdot \frac{\sin(\theta)}{g} \rightarrow \cos(\theta) = \frac{g}{R \cdot \omega^2}$$

b) Considerando la expresión encontrada en la parte anterior. ¿Qué valor mínimo puede tomar la velocidad angular ω para que exista una solución? (2,0)

$$\cos(\theta) = \frac{g}{R \cdot \omega^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R \cdot cos(\theta)}}$$

Como el valor máximo de $cos(\theta) = 1$ (en este caso se presenta el ω_{min})

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$