P3) (No recuerdo qué parte de la pregunta)

Considere un tren de n (carros de igual masa) y masa total m que se desplaza con velocidad inicial u_0 . Cada t^* , un carro del tren es soltado con velocidad $-u_0$.

Se define u_i como la velocidad del tren (o lo que queda de tren) en el intervalo

$$(i \cdot t^*, (i + 1) \cdot t^*).$$

Demuestre que para todo i tal que ($n > i \geq 1$), se tiene:

$$u_i = \frac{u_{i-1} \cdot (n + 1 - i) + u_0}{n - i}$$

(Me parece que esto está más simplificado que lo que puse en clases)

Solución:

Sabemos que:

u_0 se presenta en el intervalo inmediatamente después a que se hayan soltado 0 carros
 u_1 se presenta en el intervalo inmediatamente después a que se hayan soltado 1 carros
 u_{i-1} se presenta en el intervalo inmediatamente después a que se hayan soltado $(i - 1)$ carros
 u_i se presenta en el intervalo inmediatamente después a que se hayan soltado (i) carros

Por otro lado, la masa de cada carro es:

$$m_c = \frac{m}{n}$$

Debemos aplicar conservación del momentum lineal en nuestro sistema aislado, entre el instante anterior a que suelte el i - ésimo carro y el momento posterior a ello.

Calculamos el momentum inicial:

$$\vec{p}_i = m_{T(i-1)} \cdot \vec{v}_{T(i-1)}$$

$m_{T(i-1)}$ = Masa de lo que queda de tren antes de soltar el carro

$\vec{v}_{T(i-1)}$ = Velocidad de lo que queda de tren antes de soltar el carro

Como ha soltado $(i - 1)$ carros, quedan $(n - (i - 1)) = (n + 1 - i)$ carros.

Luego:

$$m_{T(i-1)} = \frac{m}{n} (n + 1 - i)$$

Por definición:

$$\vec{v}_{T(i-1)} = u_{i-1}$$

Luego:

$$\vec{p}_i = \frac{m}{n} (n + 1 - i) \cdot u_{i-1}$$

Ahora bien, después del lanzamiento, nuestro sistema aislado tiene dos objetos: el carro soltado y lo que queda del tren. Tenemos:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{(\text{Carro soltado})} + \vec{p}_{(\text{Lo que queda de tren})}$$

Por los datos sabemos que:

$$\vec{p}_{(\text{Carro soltado})} = m_C \cdot v = \frac{m}{n} \cdot (-u_0)$$

Por otro lado:

$$\vec{p}_{(\text{Lo que queda de tren})} = m_{(\text{Lo que queda de tren})} \cdot v_{(\text{Lo que queda de tren})}$$

Como el tren, después del lanzamiento, ha lanzado i carros en total, le quedan $n - i$ carros:

$$m_{(\text{Lo que queda de tren})} = m_C \cdot (n - i) = \frac{m}{n} (n - i)$$

Por definición:

$$v_{(\text{Lo que queda de tren})} = u_i$$

Luego:

$$\vec{p}_{(\text{Lo que queda de tren})} = \frac{m}{n} (n - i) \cdot u_i$$

Finalmente:

$$\vec{p}_f = \frac{m}{n} \cdot (-u_0) + \frac{m}{n} (n - i) \cdot u_i$$

Como el sistema es aislado (no interactúa con otros objetos), podemos usar la ley de conservación del momentum lineal:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} (n + 1 - i) \cdot u_{i-1} &= \frac{m}{n} \cdot (-u_0) + \frac{m}{n} (n - i) \cdot u_i \\ u_i &= \frac{\frac{(n + 1 - i)}{n} \cdot u_{i-1} + \frac{u_0}{n}}{\frac{n - i}{n}} = \frac{u_{i-1} \cdot (n + 1 - i) + u_0}{n - i} \end{aligned}$$

(Observar que satisface las ecuaciones que obtuvimos para el caso particular $n = 3$)

Como es dato el caso base (u_0) tenemos una expresión para cualquier velocidad (por principio de inducción).