FI 1001 – Sección 3
Prof. René A. Méndez
Ejercicio #4

1) **Conceptual – Movimiento rectilíneo (40%):**

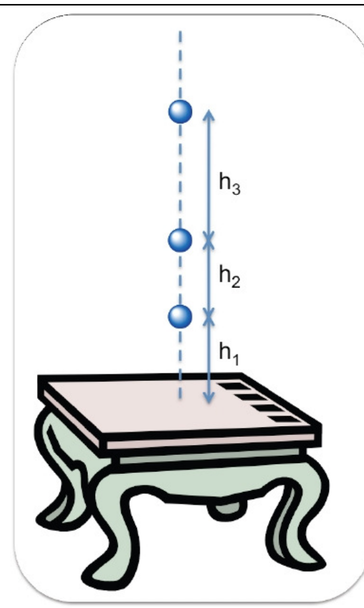
Considere las siguientes combinaciones de signos de velocidad y aceleración de un móvil que se desplaza en una trayectoria rectilínea infinita (no hay bordes). Describa qué esta haciendo el móvil en cada caso, y en una frase *de un ejemplo* de la vida real para *cada* situación.

	VELOCIDAD	ACELERACIÓN
a	positiva	positiva
b	positiva	negativa
c	positiva	cero
d	negativa	positiva
e	negativa	negativa
f	negativa	cero
g	cero	positiva
h	cero	negativa

2) **Aplicación – Movimiento a aceleración constante (60%):**

Dos partículas se sueltan simultáneamente, desde alturas h_1 y h_1+h_2 y se dejan caer sobre una mesa (ver figura).

1) Calcule h_2 en términos de h_1, de modo que el intervalo de tiempo entre golpes en la meas sea igual al tiempo que le toma a la primera partícula en golpear la mesa,
2) Una tercera partícula se suelta simultáneamente con las anteriores desde una altura h_1+h_2+h_3. Calcule la distancia entre esta partícula y la que golpea justo antes, de modo que el intervalo de tiempo entre golpes sucesivos sea constante,
3) Considere ahora una serie de masas i = 1…N, atadas por un hilo. En un instante dado el hilo se corta en su parte superior. Para las mismas condiciones señaladas en 1) y 2) – y usando esos resultados, calcule la distancia entre dos masas cualesquiera j y j+1.



NB: Notar que no se le pregunta la altura de cada masa, solo su distancia relativa.
La gravedad, g, apunta hacia abajo.

Considere las siguientes combinaciones de signos de velocidades y aceleraciones de un móvil que se desplaza en una trayectoria rectilínea. Describa qué está haciendo el móvil en cada caso y en una frase de un ejemplo cotidiano para cada situación.

	VELOCIDAD	ACELERACIÓN
a	positiva	positiva
b	positiva	negativa
c	positiva	cero
d	negativa	positiva
e	negativa	negativa
f	negativa	cero
g	cero	positiva
h	cero	negativa

El móvil acelera en la dirección de su movi-iento. Es decir aumenta su rapidez. Ejemplo: un ıto adelantando a otro en una autopista.

La aceleración disminuye la rapidez. Ejemplo. un auto frenando.

Instantaneamente la velocidad es constante. Ejemplo: el metro entre estaciones anda con aceleraciones minimas.

La velocidad es negativa, pero la aceleración disminuye la rapidez. Ejemplo: Un auto en sentido opuesto que frena para no chocar con nosotros (que vamos en el auto de b)

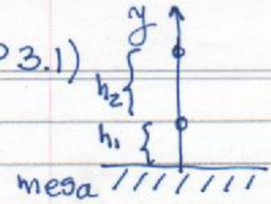
Nuevamente la rapidez crece pues la aceleración es en el mismo sentido de la rapidez. Ejemplo:

El móvil esta con velocidad instantáneamente constante. Se mueve el el sentido opuesto al eje positivo. Ejemplo: un auto en el sentido opuesto que no se dio cuenta que va a chocar con nosotros (!).

El objeto esta en reposo, pero comienza a moverse en el sentido positivo. Ejemplo: el metro cuando parte.

El objeto esta en reposo, pero comienza a moverse en el sentido negativo. Ejemplo: un auto comenzando a moverse en marcha atras. [0.25 puntos c/u]

P3.1)



$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

2 puntos

Para la masa 1

$y_1(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$. Golpea la mesa

en τ_1 $\quad y_1(\tau_1) = 0 = h - \frac{1}{2} g \tau_1^2$

$$\tau_1 = \left(\frac{2h_1}{g}\right)^{1/2}$$

Para la 2^a masa $\quad y_2(\tau_2) = 0 = h_1 + h_2 - \frac{1}{2} g \tau_2^2$

$$\tau_2 = \left(\frac{2(h_1 + h_2)}{g}\right)^{1/2}$$

El intervalo entre golpes es $\tau_2 - \tau_1$, y queremos que esto sea igual a $\tau_1 \Rightarrow$

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_1 \Rightarrow \tau_2 = 2\tau_1 \qquad (I)$$

$$\left(\frac{2(h_1 + h_2)}{g}\right)^{1/2} = 2\left(\frac{2h_1}{g}\right)^{1/2}$$

$$\frac{2(h_1 + h_2)}{g} = 4 \cdot \frac{2h_1}{g} \Rightarrow h_2 = 4h_1 - h_1 = 3h_1$$

P3.2) Para la 3^a partícula

2 puntos

$$\tau_3 = \left(\frac{2(h_1+h_2+h_3)}{g}\right)^{1/2}.$$

y para que la frecuencia de golpes sea constante

$$\tau_3 - \tau_2 = \tau_1 \Rightarrow \tau_3 = \tau_1 + \tau_2 = 3\tau_1 \quad (\mathrm{II})$$

$$\left(2\frac{(h_1+h_2+h_3)}{g}\right)^{1/2} = 3\left(\frac{2h_1}{g}\right)^{1/2}$$

$$h_1+h_2+h_3 = 9h_1$$

$$h_3 = 9h_1 - h_1 - h_2 = 9h_1 - h_1 - 3h_1 = 5h_1$$

P3.3) Cuando el hilo se corta, todas las masas experimentan caída libre de manera simultánea. Entonces, la situación es totalmente análoga a lo visto en 3.1 y 3.2, el hilo que las ata no juega ningún rol (¡una vez que se corta!)

2 puntos

Para calcular la distancia entre dos partículas cualquiera, notamos de 3.1 y 3.2 que h_{j+1} es justamente la distancia entre la partícula j y la $j+1$; con $j=1,\dots,N-1$

Ahora hay dos maneras de proceder: una + fácil que la otra, pero equivalentes.

P3.3 continuación)

Manera "fácil". De (I) y (II) vemos que

$\tau_j = j \cdot \tau_1$ ("inducción") (III)

Esto es bastante intuitivo; el instante de cada golpe después del 1er golpe es un múltiplo del 1er golpe, de modo que la frecuencia (o intervalo) de golpes sea fija (por construcción del problema, según el enunciado).

Luego, vemos que (de(III))

$$\tau_{j+1} = (j+1)\tau_1$$

$$\tau_j = j\,\tau_1$$

Pero $\tau_{j+1} = \left(\frac{2(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{g}\right)^{1/2} = (j+1)\tau_1 \quad /(\ )^2$

$$\tau_j = \left(\frac{2(h_1+h_2+\cdots+h_j)}{g}\right)^{1/2} = j\,\tau_1 \quad /(\ )^2$$

Elevando al II y restando:

$$\tau_{j+1}^2 - \tau_j^2 = \underbrace{\frac{2\sum_{i=1}^{j+1} h_i}{g} - \frac{2\sum_{i=1}^{j} h_i}{g}}_{\frac{2h_{j+1}}{g}} = \underbrace{\left[(j+1)^2 - j^2\right]}_{(2j+1)}\tau_1^2$$

$$\Rightarrow h_{j+1} = \frac{g}{2}(2j+1)\tau_1^2 = \frac{\cancel{g}}{\cancel{2}}(2j+1)\frac{\cancel{2}h_1}{\cancel{g}}$$

$$\boxed{h_{j+1} = (2j+1)\,h_1} \qquad (h_2 = 3h_1;\ h_3 = 5h_1,\ \text{etc}).$$

Manera "difícil"

$$\tau_{j+1} = \left(\frac{2\,(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{g}\right)^{1/2}$$

$$\tau_{j+1} = (j+1)\,\tau_1 = (j+1)\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

$$\frac{\cancel{2}(h_1+h_2+\cdots+h_{j+1})}{\cancel{g}} = (j+1)^2\frac{\cancel{2}h_1}{\cancel{g}}$$

$$h_{j+1} = (j+1)^2 h_1 - (h_1+h_2+\cdots+h_j)$$

$$= (j+1)^2 h_1 - \sum_{i=1}^{j} h_i \qquad (\mathrm{II})$$

"inducción"

Como $h_2 = 3h_1\ ;\ h_3 = 5h_1, \ldots, h_i = (2(i-1)+1)\,h_1 = (2i-1)h_1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{j} h_i = \Big[2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{j} i}_{\frac{j(j+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{j} 1}_{j}\Big]\, h_1 = \big[j(j+1)-j\big]\, h_1 = j^2 h_1$$

$\Rightarrow$ en (II)

$$h_{j+1} = (j+1)^2 h_1 - j^2 h_1 = (2j+1)\, h_1$$

$$\boxed{h_{j+1} = (2j+1) h_1}$$

Ambas maneras de resolver el problema se consideran válidas.