Vectores (como introducción a cinemática en 2-d)

En 1-d basta una coordenada para identificar la posición de 1 punto. En 2-d (e.g; sobre un plano) necesitamos 2 ~~pa~~ números (en gral reales) para localizarlo. Para identificar su significado sin ambigüedades estos 2 números deben darse como un par ordenado: Por convención, el 1er número corresponde a la abcisa (eje horizontal) del punto a identificar, y el 2º número a la ordenada (eje vertical). Usualmente el punto en cuestión (e.g "P") se escribe como $P(x, y)$.

La recta que une el origen O (o "punto de aplicación") con el punto P se denomina vector OP, y se escribe $\overrightarrow{OP}$

Definir dirección, sentido, magnitud

y contiene información sobre la <u>dirección</u>, ②

<u>sentido</u> ~~y~~ <u>magnitud</u>, y punto de aplicación (origen) del vector.

Dirección: Línea que atraviesa los ptos O y P

Sentido : Flecha que se instala en el extremo del trazo

Magnitud : Largo del trazo

Punto de aplicación : Origen del trazo.

Magnitud (ó modulo) del vector :

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad \text{(teo. Pitágoras)}$$

La magnitud de todo vector es <u>siempre</u> ≥ 0. Por ↑ De aquí en adelante vector = vector libre

ejemplo para $\overrightarrow{AB}$ de la figura

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Vector Libre: Es un vector que está caracterizado sólo por su módulo, dirección y sentido. El vector libre es independiente del lugar en el que se encuentra (o punto de aplicación).

<u>Representación analítica de un vector</u> ó un vector libre

se representa por un par ordenado de números

$$\overrightarrow{Vector} = (\text{proyección de } \vec{V} \text{ sobre el eje } X, \text{ proy. de } \vec{V} \text{ sobre el eje } Y)$$

Ejemplo:

$$\overrightarrow{OP} = (x_p ; y_p) = (x_p - 0 ; y_p - 0) \quad \leftarrow \text{origen}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A) = (\text{cabeza} - \text{cola}, \text{cabeza} - \text{cola}) \quad \leftarrow \text{origen}$$

etc

Notar que si $x_P = x_B - x_A$ e $y_P = y_B - y_A$ ⇒ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ cuando O [illegible] origen de [illegible]

NB: $(y_p ; x_p) \neq (x_p ; y_p)$, $(x_A - x_B ; y_A - y_B) \neq (x_B - x_A ; y_B - y_A)$

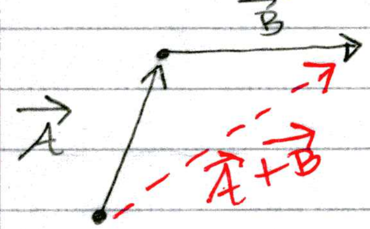
Los números x_p e y_p de $\vec{OP}$ son "la componente x" (OP_x) y la "componente y" (OP_y) del vector $\vec{OP}$: Sombra que proyecta $\vec{OP}$ sobre el eje OX y sobre el eje OY respectivamente.

Para simplificar notación, de aquí en adelante usamos una sola letra; e.g; $\vec{v}$ para denotar un vector libre; pero siempre tiene 2 componentes (x,y).

Algebra de vectores (libres):

Suma de vectores:

$\vec{A}+\vec{B}$: poner la cola de $\vec{B}$ a continuación de la cabeza de A y graficar la resultante que va desde la ~~cabeza~~ cola de A a la cabeza de B.



Notar que $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$; conmutativa

otro método: Regla del Paralelogramo (ver Massman/Zamorano)

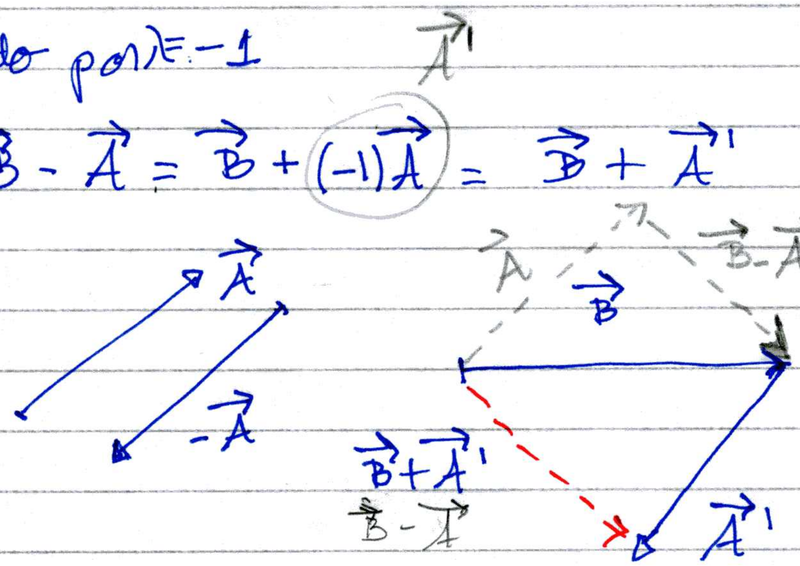
Producto de un número real y un vector: Si λ es un número real cualquiera:

$\lambda\cdot\vec{A}$: Vector c/ misma dirección de $\vec{A}$, pero de largo $|\lambda|$ veces el largo de $\vec{A}$. Si $\lambda>0$ sentido de $\lambda\vec{A}$ es mismo que el de $\vec{A}$; si $\lambda<0$ se invierte el sentido.

λ no es un vector $\Rightarrow$ "escalar" (factor de escala!)

Resta de vectores: Equivalente a la suma de vectores, pero en el que uno de ellos está multiplicado por $\lambda = -1$

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + (-1)\vec{A} = \vec{B} + \vec{A}' \quad \text{con} \quad \vec{A}' = -1\vec{A}$$



→ vector que vā desde la cabeza de $\vec{A}$ a la cabeza de $\vec{B}$

Suma de 3 o + vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \text{ etc}$$

"asociatividad"

Método algebraico: Si $\vec{A} = (x_A, y_A)$ componentes de A

$\vec{B} = (x_B, y_B)$ " " B

definición!

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_A + x_B \,;\, y_A + y_B)$$; suma de las componentes.

definición

$$\lambda \cdot \vec{A} = (\lambda x_A \,;\, \lambda y_A)$$

Vectores unitarios: En física, además de la notación por componentes, se usan los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ de modo tal que

$$\vec{A} = (A_x, A_y) \overset{\text{definición}}{=} \underbrace{A_x}_{\text{componente } x \text{ de } A = A_x}\hat{\imath} + \overbrace{A_y}^{\text{componente } y \text{ de } A = A_y}\hat{\jmath}$$

$\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son vectores de largo (módulo) igual a 1 (unitario!) y que apuntan a lo largo del eje X e Y respectivamente.

[Notación distinta para la misma representación analítica de un vector.]

Cuadro resumen: Ver libro Zamorano.
Ver libro de Massman para otras propiedades importantes de los vectores.

En general,
Dado cualquier vector $\vec{V}$, su correspondiente vector unitario se obtiene a partir de:

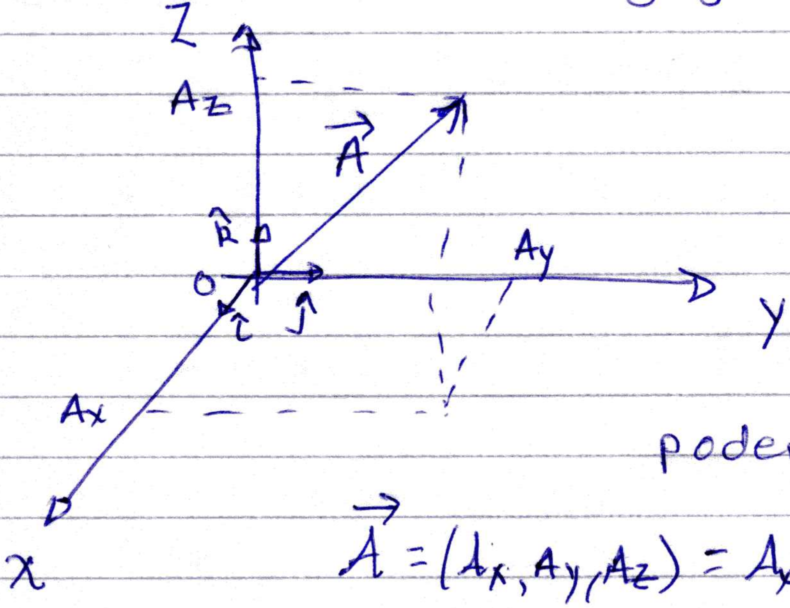
(5.1)

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{v_x}{v}, \frac{v_y}{v}\right)$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

En efecto; $|\hat{v}| = \sqrt{\frac{v_x^2}{v^2} + \frac{v_y^2}{v^2}} = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{v^2}} = 1$

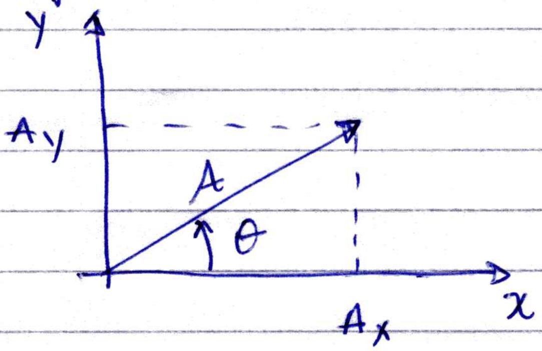
En 3-d, podemos definir los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ que apuntan en la dirección de ~~qu~~ de los ejes x, y y z respectivamente.



En este caso, para un vector $\vec{A}$ cualquiera podemos escribir

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

Componentes cartesianas y polares de un vector



Sea $\vec{A}$ un vector cualquiera, con componentes cartesianas A_x, A_y; es decir $\vec{A} = (A_x, A_y)$

Las componentes A_x y A_y se pueden expresar en función de la magnitud de $\vec{A}$ y del ángulo θ que forma c/el eje x:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta \\ A_y &= A\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \text{con} \quad \begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \tan\theta &= \frac{A_y}{A_x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{A}$ queda determinado por

$\left.\begin{matrix} A_x \\ A_y \end{matrix}\right\}$ componentes cartesianas

$\left.\begin{matrix} A \\ \theta \end{matrix}\right\}$ coordenadas polares del vector $\vec{A}$

Producto escalar o producto punto de 2 vectores (5.3)

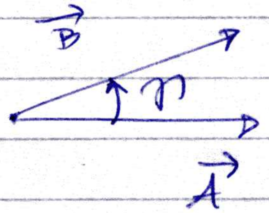
Consideremos 2 vectores $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$

$$= A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}$$

y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B_x \hat{\imath} + B_y \hat{\jmath} + B_z \hat{k}$

Producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ $= \vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$ ← ∡ entre los 2 vectores

$(= \vec{B} \cdot \vec{A})$ conmutativo



(Además, $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ distributivo)

Usando esta definición vemos que:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = |\hat{\imath}| \cdot |\hat{\imath}| \cos 0° = 1 = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k}$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\imath}| |\hat{\jmath}| \cos 90° = 0 = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k}$$

Ahora, con esto, tendremos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{\imath} + B_y \hat{\jmath} + B_z \hat{k})$$

$$\left.\begin{aligned} = {} & A_x B_x \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + A_x B_y \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + A_x B_z \hat{\imath} \cdot \hat{k} + \\ & A_y B_x \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + A_y B_y \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} + A_y B_z \hat{\jmath} \cdot \hat{k} + \\ & A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{\imath} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{\jmath} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}\right\} \text{aplicando la distributividad de manera recursiva.}$$

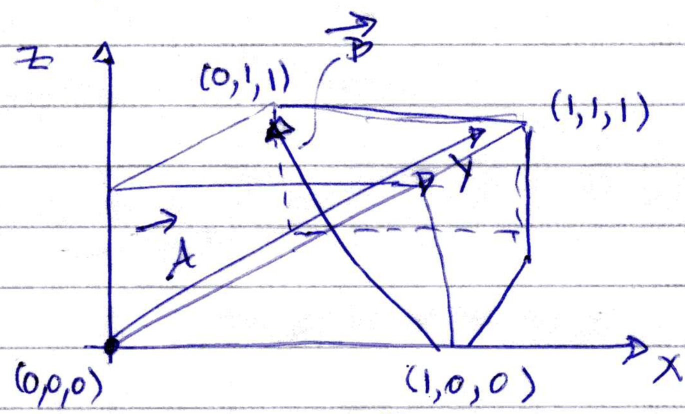
$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Por lo tanto,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\gamma = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

lo que permite evaluar $\cos\gamma$ si se conocen las componentes cartesianas de $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Ejemplo: Calcular el ∡ entre dos diagonales de un cubo de lado 1.



$$\vec{A} = [(1,1,1) - (0,0,0)] = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

final − inicial = cabeza − cola

$$\vec{B} = [(0,1,1) - (1,0,0)] = (-1,1,1) = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\gamma = \sqrt{3}\,\sqrt{3}\cos\gamma$$

Pero, de las comp. cartesianas $\vec{A}\cdot\vec{B} = (1)(-1) + (1)(1) + 1\cdot 1 = 1$

$\Rightarrow \cos\gamma = 1/3\ ;\ \gamma \simeq 70.5^\circ$