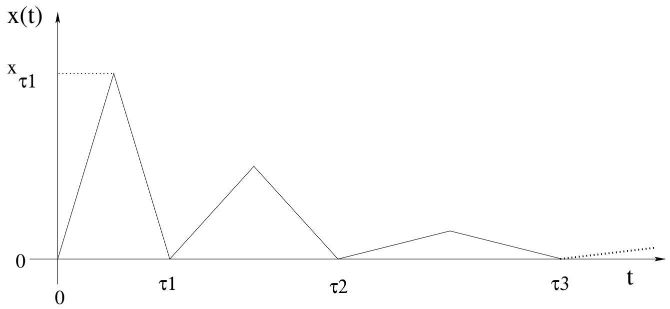
FI 1001 – Sección 3
Prof. René A. Méndez
Ejercicio #3

1) **Conceptual – Rapidez & distancia recorrida (40%):**

Considere un móvil cuya función itinerario, equivalente a un movimiento oscilatorio, se presenta en la siguiente figura:

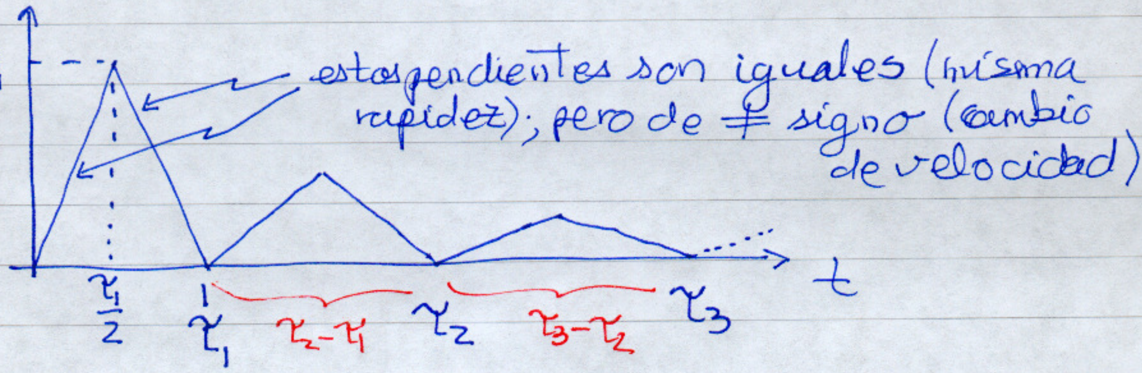


El móvil realiza este movimiento cumpliendo las siguientes condiciones: El área bajo la curva *x(t) vs. t* en cada oscilación (es decir de 0 a τ_1, de τ_1 a τ_2, de τ_2 a τ_3, etc.) es *constante*, el movimiento de ida y vuelta *dentro* de cada oscilación lo hace a la *misma rapidez*, y se cumple que $\tau_2-\tau_1=2\tau_1$, $\tau_3-\tau_2=3\tau_1, \ldots$ $\tau_N-\tau_{N-1}=N\tau_1$. Si el movimiento oscilatorio se repite en estas condiciones N veces (indicado por la línea punteada al lado derecho de la figura), obtenga una expresión para la distancia recorrida por el móvil luego de N oscilaciones. Deje expresado su resultado en términos de $x_{\tau 1}$ y de τ_1, que se suponen conocidos.
NB: El gráfico NO está necesariamente a escala, es solo referencial.

2) **Aplicación – Cinemática a velocidad constante (60%):**

El chofer de un tren que se desplaza a velocidad constante $\mathbf{V_T}$ se queda dormido y cruza el andén de una estación sin detenerse. El encargado de andén se da cuenta que la barrera del cruze de automóviles que está a una distancia **d** desde el andén (en la misma dirección en que se desplaza el tren, y en línea recta desde el andén) está abierta, y los automóviles cruzan libremente sin percatarse del tren que se aproxima. Entonces, $\mathbf{t_p}$ segundos después de que el tren cruza el andén, al encargado de andén se le ocurre enviar su paloma mensajera al guardavías del cruze de automóviles para que baje la barrera y deje pasar al tren desbocado. Calcule la velocidad *mínima* a la que tendría que volar la paloma para que alcanze a llegar al cruze justo antes de que pase el tren por allí. Suponga que la paloma vuela a velocidad constante.

P1).-



$\tau_2-\tau_1 = 2\tau_1$; $\tau_3-\tau_2 = 3\tau_1$, ... $\tau_N - \tau_{N-1} = N\tau_1$

Como la rapidez de ida y vuelta es la misma en cada oscilación; el "punto de retorno" está al medio del intervalo; es decir en $\tau_1/2$; $\frac{\tau_1+\tau_2}{2}$; $\frac{\tau_2+\tau_3}{2}$, ... etc.

$$\text{Area}_1 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\tau_1}{2}\right)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{x_{\tau_1}}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{2}_{\text{dos triángulos}} = \frac{1}{2}\tau_1 x_{\tau_1} = \text{Area de } 1^a \text{ oscilación}$$

$$\text{Area}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{2}\right) \cdot x_{\tau_2} \cdot 2 = \frac{1}{2}\overbrace{(\tau_2-\tau_1)}^{2\tau_1} x_{\tau_2} = \tau_1 x_{\tau_2}$$

$$\text{Area}_1 = \text{Area}_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\tau_1 x_{\tau_1} = \tau_1 x_{\tau_2} \Rightarrow x_{\tau_2} = \frac{1}{2} x_{\tau_1}$$

Para el area 3 es fácil mostrar que $x_{\tau_3} = \frac{1}{3} x_{\tau_1}$;

y en general $x_{\tau_N} = \frac{1}{N} x_{\tau_1}$

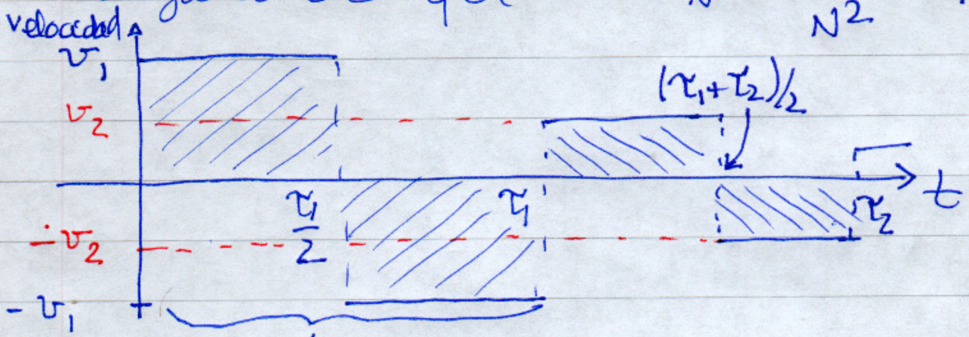
La rapidez de c/oscilación (es la misma de ida y vuelta) sera

$$v_1 = \frac{x_{\tau_1}}{\tau_1/2} = \frac{2x_{\tau_1}}{\tau_1} = \text{rapidez en } 1^a \text{ oscilación}$$

$$v_2 = \frac{x_{\tau_2}}{(\tau_2-\tau_1)/2} = \frac{\frac{1}{2}x_{\tau_1}}{2\tau_1/2} = \frac{1}{2}\frac{x_{\tau_1}}{\tau_1} = \frac{1}{2^2}v_1$$

$$v_3 = \frac{x_{\tau_3}}{(\tau_3-\tau_2)/2} = \frac{\frac{1}{3}x_{\tau_1}}{\frac{3\tau_1}{2}} = \frac{1}{3\times 3}\,\frac{2x_{\tau_1}}{\tau_1} = \frac{1}{3^2}v_1$$

Es fácil ver que: $v_N = \frac{1}{N^2}v_1$



Distancia recorrida = área bajo la curva v vs t ⇒

son 2 rectángulos...

$$d_1 = v_1\cdot\frac{\tau_1}{2}\times 2 = v_1\tau_1$$

$$d_2 = \left(\frac{\tau_2-\tau_1}{2}\right).v_2\times 2 = v_2\cdot 2\tau_1 = \frac{1}{2}v_1\tau_1$$

$$d_3 = \left(\frac{\tau_3-\tau_2}{2}\right).v_3\times 2 = v_3 . 3\tau_1 = \frac{1}{3}v_1\tau_1$$

...

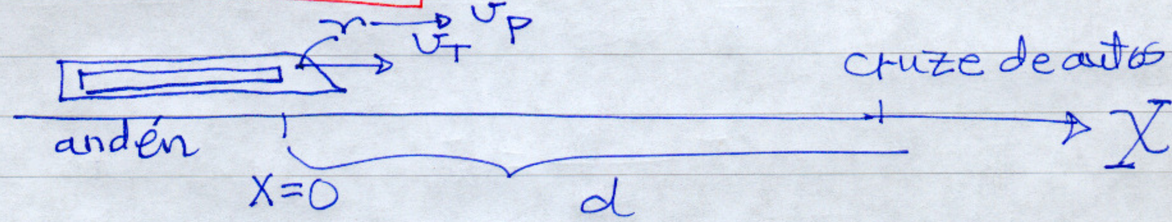
$\Rightarrow d_N = \frac{1}{N} v_1 \tau_1 \Rightarrow$ distancia total recorrida

será

$$D_N = \sum_{i=1}^{N} d_i = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \cdots + \frac{1}{N}\right) v_1 \tau_1$$

$$\boxed{D_N = \sum_{i=1}^{N} \left(1/i\right) \cdot 2x_1}$$

-P2)..



Si en $t=0$ el tren pasa por el anden ; $x_T(t) = v_T \cdot t$ (itinerario para el tren).

En $t=t_p$ se echa a volar la paloma con $v_p \Rightarrow$ (itinerario de la paloma)

$$x_p(t) = v_p(t-t_p) \qquad (t \geq t_p)$$

Cuando la paloma llega al cruze $\Rightarrow$

$$x_p(t_b) = d = v_p(t_b - t_p) \Rightarrow$$

$t_b = t_p + \frac{d}{v_p}$ = tiempo (istante) en que la paloma llega al cruze

En ese intervalo el tren se abrá desplazado hasta:

$$x_T(t_b) = v_T \cdot \left(t_p + \frac{d}{v_p}\right)$$

Para que se baje la barrera antes de que el tren llegue al Π; debemos imponer que

$$x_T(t_b) \leq d$$

$$v_T\left(t_p + \frac{d}{v_p}\right) \leq d \qquad / \cdot v_p$$

$$v_T t_p v_p + v_T \cdot d \leq d\, v_p \implies$$

$$v_T d \leq (d - v_T t_p)\, v_p \implies$$

$$\boxed{v_p \geq \frac{v_T d}{d - v_T t_p} = \frac{v_T}{(1 - v_T \cdot t_p/d)}} \quad (*)$$

Notar que el denominador es siempre ≥ 0; en efecto:

$$1 - v_T \frac{t_p}{d} > 0 \implies$$

$$1 > v_T \frac{t_p}{d} \qquad ó$$

$$t_p < \frac{d}{v_T} \Leftarrow v_T < \frac{d}{t_p}$$

; lo que nos dice que la palana alcanza a avisarle al guarda cruce solo si t_p es menor que el tiempo que le toma al tren en llegar al cruce (obvio!). Si $t_p = \frac{d}{v_T}$; según (*) la palana debiera volar a una velocidad infinita para avisarle al guarda-cruce en ese mismo instante...