FI 1001 – Sección 3
Prof. René A. Méndez
<u>Ejercicio #2</u>

<u>¡SIN CALCULADORA!</u>

1) **Conceptual – Desarrollo en serie (20%):**

Considere un objeto cuya velocidad en función del tiempo *t* está dada por $v(t) = v_0 \cdot \left(\frac{(1+t)^{\alpha} - 1}{t} \right)$. Calcule la velocidad *inmediatamente* después de *t=0* (o sea cuando *t<<1*). v_0 (que tiene unidades de velocidad) y α (adimensional) son valores constantes. ¿Cuál será la velocidad exactamente en *t=0*?

2) **Aplicación – Aproximaciones (80%):**

De acuerdo con la teoría de la relatividad especial, la masa de un objeto, *m*, depende de su velocidad v de acuerdo con $m(v) = \gamma(v) \cdot m_0$, donde m_0 es la masa en reposo (cuando $v = 0$), y γ es el "factor de Lorentz" dado por $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, siendo *c* la velocidad de la luz. *Estime* la variación porcentual de la masa de la Tierra en su traslación alrededor del Sol, sabiendo que $v = 30$ km s^{-1} y *c* =300.000 km s^{-1}.

<u>¡SIN CALCULADORA!</u>

Ej #2 - Sección 3 R. Mendez 2010

P1).- $v(t) = v_0\left[\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}\right]$

Notamos que cuando t es muy cerca de 0, el numerador se acerca a 0 y el denominador también, y nos queda una expresión aritméticamente no definida, es decir del tipo 0/0 (0 dividido por 0).

Sin embargo, podemos estudiar el comportamiento de esa función, desarrollando el binario. Como hemos visto:

$$(1+t)^\alpha \simeq 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3 + \dots$$

Entonces

$$\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \frac{1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3 + \dots - 1}{t}$$

$$\text{o}(1) \quad = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t \qquad \text{(a primer orden en t)}$$

Entonces; cuando t es pequeño (inmediatamente después de $t=0$); la velocidad crece linealmente con el tiempo:

$$v(t) \cong v_0 \left[\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot t \right] \quad (1)$$

velocidad inmediatamente después de $t=0$

La ecn (1) es válida para todo t pequeño; y en particular para $t=0 \Rightarrow$

$$v(0) = v_0 \cdot \alpha$$

Velocidad "exactamente" en $t=0$

P2) $v = 30$; $c = 300.000 \Rightarrow v/c << 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}(v/c)^2$$

$$m \cong m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\frac{m - m_0}{m_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \qquad / \times 100$$

$$\left(\frac{m-m_0}{m_0}\right) \times 100 = 50\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 50\left(\frac{30}{300.000}\right)^2 = 0.5 \times 10^{-6} \%$$

$\Rightarrow$ media millonésima de % !! (poquito)

Como masa tierra $= 6 \times 10^{24}$ kg $\Rightarrow$

$$(m - m_0) = 6 \times 10^{24} \times \frac{1}{2}\left(\frac{30}{300.000}\right)^2$$

$$= 3 \times 10^{16} \text{ kg} \quad !!$$ (poquito??)

Esto no se pedía...