

→ El movimiento circular uniforme abarca los problemas que involucren un desplazamiento de manera circular, también es posible realizar problemas en donde el radio sea variable, sin embargo no es parte de este curso.

A diferencia del movimiento rectilíneo, cuando trabajamos con M.C.U. no trabajamos con unidades de desplazamiento, sino que se trabaja en "ángulos", más conocidos como radianes; Estos radianes no corresponden a unidades físicas, no se pueden medir, sin embargo se acepta el hecho de trabajar con estas "unidades" por convención.

En el movimiento circular hay que distinguir 6 conceptos:

$\vec{r}$ = Posición de la partícula en todo momento (ver parametrización)

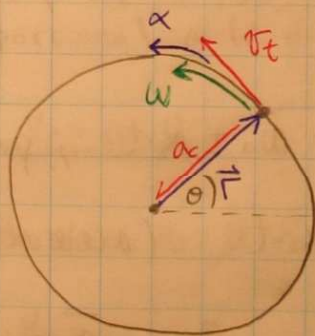
θ = ángulo: Corresponde al "desplazamiento" del M.C.U., se mide en radianes

ω = velocidad angular: Es la velocidad con la que una partícula recorre un cierto ángulo θ , se mide en (radianes)/(segundo)

α = Es la aceleración de la partícula en M.C.U., se mide en (radianes)/(segundo)²

v_t = Velocidad tangencial: corresponde a la velocidad tangencial a la circunferencia, y corresponde a la velocidad rectilínea de la partícula, esta es perpendicular a $\vec{r}$ y se mide en (metro)/(segundo)

a_c = Corresponde a una aceleración generada por el cambio de sentido de la velocidad, esta aceleración siempre apunta hacia el centro, de ahí su nombre, se mide en (metro)/(segundo)² (aceleración centrípeta)



Desde este punto ya es posible realizar una analogía con el movimiento rectilíneo.

se define $\omega \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \Rightarrow$ diferencia de ángulo en un delta t.

$\alpha \equiv \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) \Rightarrow$ " " " " velocidad angular en delta t

Estos conceptos son similares a los de mov rectilíneo, con la diferencia que no trabajamos con unidades de longitud, sino que con radianes.

$$x(t) \Rightarrow \theta(t)$$

$$v(t) \Rightarrow \omega(t)$$

$$a(t) \Rightarrow \alpha(t)$$

Y al igual que en movimiento rectilíneo tenemos 3 ecuaciones de mov.

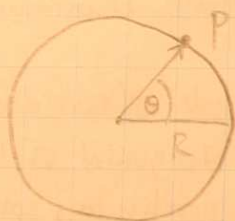
$$(i) \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$

$$(ii) \quad \omega(t) = \omega_0 \mp \alpha \cdot t$$

$$(iii) \quad 2 \cdot \alpha \cdot (\theta(t) - \theta_0) = \omega_f^2 - \omega_0^2$$

Por último se puede demostrar que $\boxed{\omega = \frac{V_t}{R}}$ y $\boxed{a_c = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R}$

Ejemplo (P3 aux 5)



El punto P se mueve con aceleración angular constante e igual a α_0 , y parte del reposo con $\theta_0 = 0$.

Encontrar $\vec{a}_c$ y $\vec{V}_t$

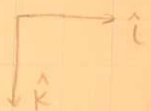
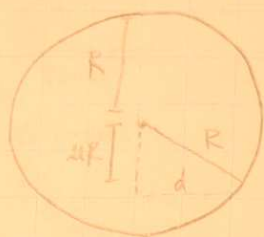
R: Sabemos que $a_c = \frac{V_t^2}{R}$, es decir, con V_t obtenemos a_c , además sabemos que $V_t = \omega \cdot R$, luego, solo tenemos que encontrar ω .

Usamos (ii) $\omega(t) = \omega_0 \pm \alpha \cdot t$, parte del reposo $\Rightarrow \omega_0 = 0$
 $\Rightarrow \omega(t) = \alpha_0 \cdot t$ (aceleración angular de.)

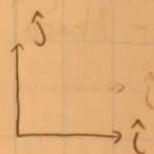
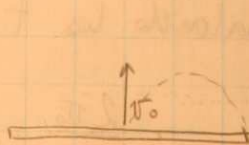
$$\therefore \vec{V}_t = R \cdot \alpha_0 \cdot t \quad \wedge \quad \vec{a}_c = R \cdot \alpha_0^2 \cdot t^2$$

- Los ejercicios de M.C.U son muy similares a M.R.U. por lo que se necesita tener dominada el área rectilínea para comprender mejor el mov. circular uniforme.

Vista aérea



Vista lateral



Hay dos formas de verlo, uno es aplicar directamente las condiciones al problema y la otra es hacerlo con detalle en base al mov. relativo, lo haremos de ambas formas.

- (1) Se debe cumplir que el tiempo que demore la pulga en avanzar d , debe ser el mismo que tarde en caer nuevamente al suelo, esta será la distancia crítica.

movimiento en $\hat{i}$

Como vimos, la pulga tiene en todo momento velocidad angular ω , por causa de esta, la pulga también tendrá una velocidad tangencial proporcional a la distancia que tenga del centro,

$\Rightarrow$

$$\underline{v_t = \omega \cdot R}$$

Como R en este caso es $\mu \cdot R$, entonces:

$$\underline{v_t = \omega \cdot \mu R}$$

$\Rightarrow$

$$d = v_t \cdot t \Rightarrow \boxed{t = \frac{d}{\omega \mu R}}$$

movimiento en $\hat{j}$

La pulga salta con $v_i = v_0$, luego tenemos la ecuación

$$y(t) = y_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

Como parte en $y_i = 0$, y queremos $y(t) = 0$, además $a = -g$

$$\Rightarrow v_i \cdot t = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{2v_i}{g} = \frac{2v_0}{g}$$

- Ahora igualando los tiempos nos da:

$$\frac{2v_0}{g} = \frac{d}{\mu R \omega}$$



- Por trigonometría $d = \sqrt{R^2 - \mu R^2}$ (vista aérea)
 $= \sqrt{R^2(1 - \mu^2)}$
 $= R\sqrt{1 - \mu^2}$

$$\therefore \frac{2v_0}{g} = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu \omega} \quad / (\cdot)^2$$

$$\frac{4v_0^2 \mu^2 \omega^2}{g^2} = 1 - \mu^2$$

$$\Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{g^2}{g^2 + 4v_0^2 \omega^2}}$$

La otra forma es similar, pero más formal.

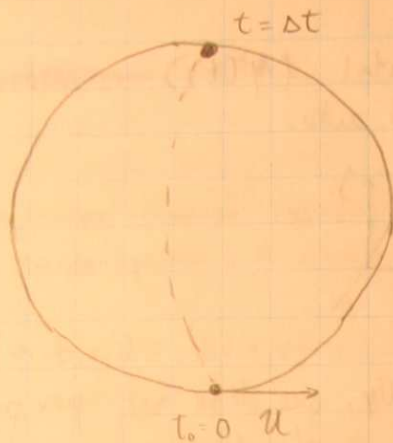
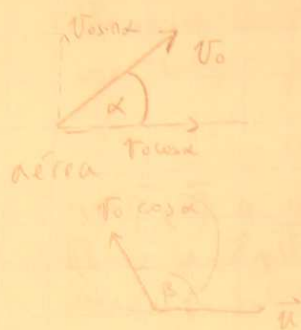
$$V_{his} = V_{hid} + V_{dis}$$

$$= v_0 \hat{j} + \omega R \mu \hat{i}$$

Y luego no es más que realizar el mismo procedimiento.

P2b aux # 5

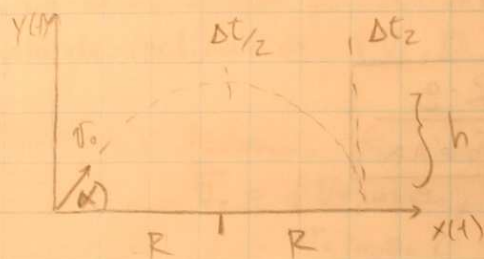
Lateral



direcciones

Lo primero es notar (por intuición), que hay dos ángulos α y β .

Lo segundo es dar cuenta de las dos condiciones que rigen al problema, y estas son que, en $t = \Delta t$ el agua debe avanzar $2R$ (distancia horizontal) y también debe de subir y bajar una misma altura h , gráficamente



(1) movimiento vertical $\Rightarrow v_i = v_0 \sin \alpha$

$$a = -g$$

$$x_i = 0$$

además, por simetría, $|v_i| = |v_f|$

* Recordar que el movimiento en presencia de gravedad es simétrico

$$\Rightarrow v_f = v_i - gt \Rightarrow -2v_0 \sin \alpha = -gt$$

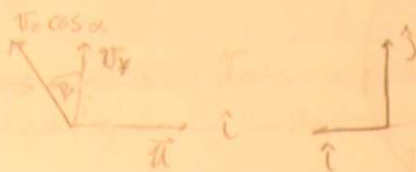
$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}}$$

También se puede usar $x_f = x_i + v_i t + \frac{at^2}{2}$

$$0 = 0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}} \quad (a)$$

Para el caso de la parte horizontal ($y(t)$) es más difícil, ya que hay que considerar la velocidad del auto. (6)



nos interesa la velocidad v_y , que debe ser perpendicular a $\vec{u}$, para lograr esto debemos disparar el chorro con $+\vec{u}\hat{i} + \vec{v}_y\hat{j}$.

$$\Rightarrow \vec{v}_0 \cos \alpha = v_y \hat{i} + u \hat{j}$$

$\Rightarrow$ Usando la fórmula $d(t) = d_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$ para $d(t) = 2R$

$$\Rightarrow 2R = v_y \cdot t \Rightarrow t = \frac{2R}{v_0 \cos \alpha \cos \beta} \quad (b)$$

además $\Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

$$\Rightarrow \boxed{v_y = \frac{R \cdot g}{v_0 \sin \alpha}}$$

Finalmente: $v_0 \cos \alpha \cdot \cos(\beta) = v_y = \frac{R \cdot g}{v_0 \sin \alpha} \quad (1)$

$$v_0 \cos \alpha \cdot \sin \beta = u \quad (2)$$

$$(1) / (2) \Rightarrow \frac{v_0 \cos \alpha \cos \beta}{v_0 \cos \alpha \sin \beta} = \frac{R \cdot g}{u \cdot v_0 \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{Rg}{u} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta \cdot \sin \alpha} = \frac{Rg}{u \cdot \sin \alpha} \cdot \tan \beta$$

Además sabemos por el auto que $\pi = \frac{u}{R} \cdot t \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi R}{u}} \quad (c)$

$$(a) \text{ y } (c) \Rightarrow \frac{\pi R}{u} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{Rg}{u \sin \alpha} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\beta = 57,51^\circ}$$

$$(b) \text{ y } (c) \Rightarrow \frac{\pi R}{u} = \frac{2R}{v_0 \cos \alpha \cos \beta} \Rightarrow v_0 = \frac{\frac{\pi R}{u}}{\frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{u}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

Usando los $\square$ $\frac{u}{\sin \beta \cos \alpha} = \frac{Rg}{u \sin \alpha} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \arctg \left(\frac{\pi R g \sin \beta}{2u^2} \right)$

Parametrización y MAS

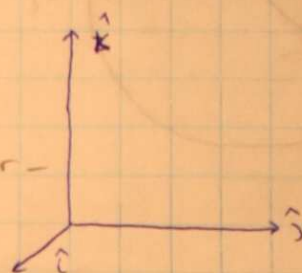
(7)

- Un vector está bien definido cuando sabemos su módulo y su dirección, es decir su "largo" y hacia donde "apunta". En términos matemáticos tenemos:

$$\vec{a} = (a, b, c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

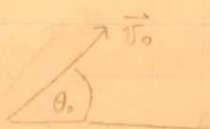
Donde la dirección viene dada por los ejes de coordenadas ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) y su módulo viene dado por:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Hay veces en que este vector es posible definirlo con parámetros en común, es decir, variables en común, como por ejemplo: tiempo, ángulo, velocidad, etc.

Por ejemplo, para un movimiento parabólico donde sabemos la velocidad inicial y el ángulo de inclinación (v_0, θ_0).



Podemos descomponer esta velocidad.

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \theta_0, v_0 \sin \theta_0, 0)$$

$$= v_0 \cos \theta_0 \hat{i} + v_0 \sin \theta_0 \hat{j}$$

$$|\vec{v}_0| = (v_0^2 \cos^2 \theta_0 + v_0^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2} = v_0 (\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0)^{1/2} = v_0$$

Ahora supongamos nos piden determinar la posición de la partícula en todo instante de tiempo t , es decir $\vec{d}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

Posición en x : $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ / $x_0 = 0, v_0 = v_0 \cos \theta_0, a = 0$
 $x(t) = v_0 \cos \theta_0 t$

Posición en y : $y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ / $y_0 = 0, v_0 = v_0 \sin \theta_0, a = -g$
 $y(t) = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{g}{2} t^2$

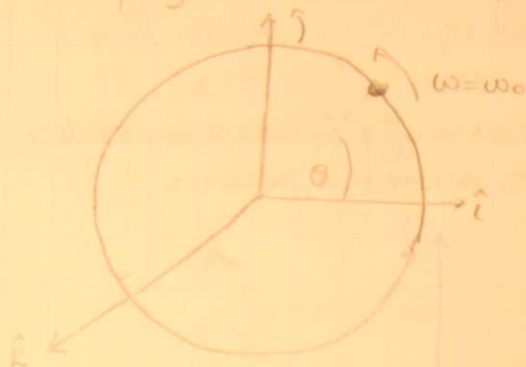
$$\Rightarrow \vec{d} = v_0 \cos \theta_0 t \hat{i} + (v_0 \sin \theta_0 t - \frac{g}{2} t^2) \hat{j}$$

$$= (v_0 \cos \theta_0 t, v_0 \sin \theta_0 t - \frac{g}{2} t^2)$$

En este caso dejamos todo en términos del parámetro t , sin embargo si no conociéramos, por ejemplo, el ángulo podríamos haber determinado $\vec{d}(\theta, t)$, es decir, la posición en función del ángulo y el tiempo. Cuando hacemos esto (dejar todo en función de ciertas variables) se dice que estamos parametrizando. Estamos buscando los parámetros que definen un movimiento.

Supongamos ahora un movimiento circular uniforme.

(8)



La partícula gira con velocidad constante ω_0 , queremos determinar $\vec{d} = (a, b)$. Para este caso en particular es muy sencillo, ya que por simple trigonometría.

$$x(\theta) = |\vec{d}| \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$y(\theta) = |\vec{d}| \sin(\theta_0 + \theta)$$

Donde θ_0 es el ángulo del que partió la partícula, generalmente $\theta_0 = 0$.

Además tenemos que para todo θ la partícula siempre está a R del origen, por lo tanto $|\vec{d}| = R$, así $\vec{d}(\theta) = [R \cos(\theta_0 + \theta), R \sin(\theta_0 + \theta)]$.

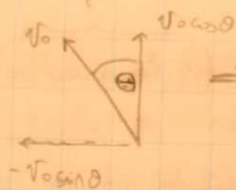
Lo que nos interesa realmente es $\vec{d}(t)$, para esto usamos las fórmulas de MCU.

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$$

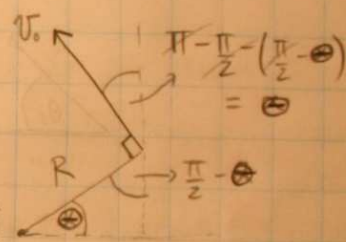
$\Rightarrow$

$$\vec{d}(t) = [R \cos(\theta_0 + \omega_0 t), R \sin(\theta_0 + \omega_0 t)]$$

Si queremos obtener $\vec{v}(t)$ se sigue el mismo principio



$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{v}(\theta) &= v_0 \cdot (-\sin(\theta_0 + \theta))\hat{i} + v_0 \cdot \cos(\theta_0 + \theta)\hat{j} \\ &= -v_0 \sin(\theta_0 + \theta)\hat{i} + v_0 \cos(\theta_0 + \theta)\hat{j} \end{aligned}$$



Y sabemos dos cosas (a) $v_0 = \omega_0 \cdot R$

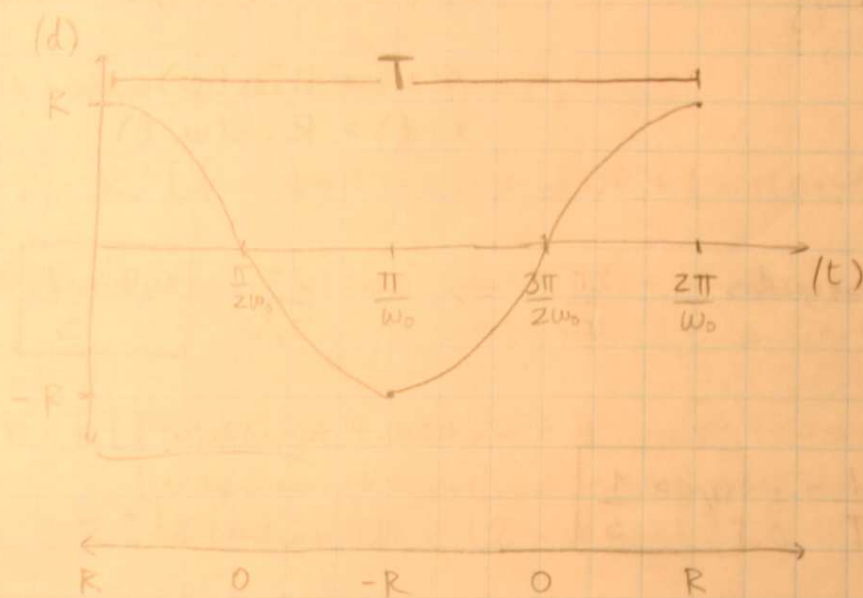
(b) $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -\omega_0 R \sin(\theta_0 + \omega_0 t)\hat{i} + \omega_0 R \cos(\theta_0 + \omega_0 t)\hat{j}$$

La aceleración queda propuesta

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -\omega_0^2 R \cos(\theta_0 + \omega_0 t)\hat{i} - \omega_0^2 R \sin(\theta_0 + \omega_0 t)\hat{j}$$

Si para el problema del círculo solo consideramos $x(t)$, despreciando $y(t)$ vemos que la partícula oscila en torno al origen, en un inicio ($\theta_0 = 0, \omega t = 0$) la partícula está a R del centro, en $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$ se encuentra en el origen, en $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ se encuentra a $-R$, en $t = \frac{3\pi}{2\omega_0}$ se encuentra a 0 y a $\frac{2\pi}{\omega_0}$ vuelve a estar en R , gráficamente:



Y si continua girando tenemos que este recorrido se repite, es decir, la partícula va y viene.

- Se define el Período (T) como el tiempo que tarda un ciclo, en este caso el ciclo es recorrer 2π radianes. Para determinar el período hacemos una regla de 3.

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{t}{\omega_0 t}$$

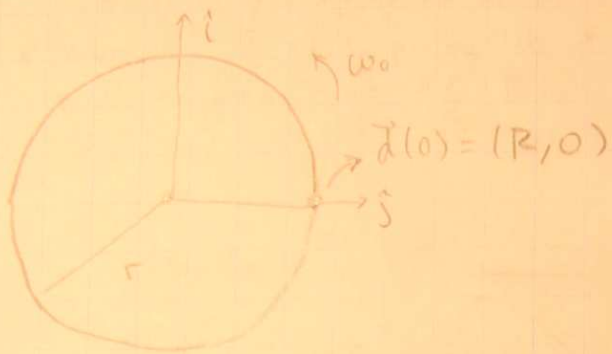
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- También se define la frecuencia f como cuántos ciclos por segundo hace la partícula, nuevamente usamos regla de 3.

$$\frac{2\pi/\omega_0}{1} = \frac{1 \text{ segundo}}{x \text{ ciclos}}$$

$$\Rightarrow \frac{x \text{ ciclos}}{1 \text{ segundo}} = \frac{\omega_0}{2\pi} = f$$

- Por último se define la amplitud como la máxima distancia entre el origen y la partícula $\Rightarrow \max(R \cos(\omega t)) = R = \text{amplitud.}$



Consideramos sólo el eje $\hat{i}$.

$$x(\theta) = R \cdot \cos(\theta_0 + \theta)$$

$$\text{En } t=0 \quad \vec{r}(0) = (R, 0) \Rightarrow \theta_0 = 0$$

$$x(\theta) = R \cos(\theta)$$

$$x(t) = R \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$$(a) \quad T = 12,56 \text{ segundos} = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{12,56} = \boxed{0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

$$(b) \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} = \boxed{0,08 \frac{1}{\text{s}}}$$

(c) Por cada periodo recorre 5m EN EL EJE $\hat{i}$

- $\Rightarrow$ En un periodo la partícula
- (1) se encuentra en R
 - (2) va al origen
 - (3) llega a $-R$
 - (4) vuelve al origen
 - (5) regresa a R

Es decir avanza $4R \Rightarrow 4R = 5\text{m} \Rightarrow R = \frac{5}{4}\text{m} = \boxed{1,25\text{m}}$

$$(d) \quad x(t) = 1,25 \cdot \cos(0,5 \cdot t) \hat{i}$$

$$v(t) = -0,625 \sin(0,5 \cdot t) \hat{i}$$

$$a(t) = -0,3125 \cos(0,5 \cdot t) \hat{i}$$

Notemos que $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = R$ (por darle un nombre)

Luego

$$\vec{r}_1 = R \cos(\phi + \omega t) \hat{i} + R \sin(\phi + \omega t) \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = R \cos(\phi - \omega t) \hat{i} + R \sin(\phi - \omega t) \hat{j}$$

Denotamos a $\vec{r}$ como $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{r} = R [(\cos(\phi + \omega t) + \cos(\phi - \omega t)) \hat{i} + (\sin(\phi + \omega t) + \sin(\phi - \omega t)) \hat{j}]$$

Aplicando trigonometría $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
 $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{r} &= R [(\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t + \cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t) \hat{i} + \\ &\quad (\sin \phi \cos \omega t + \sin \omega t \cos \phi + \sin \phi \cos \omega t - \sin \omega t \cos \phi) \hat{j}] \\ &= R [(2 \cos \phi \cos \omega t) \hat{i} + (2 \sin \phi \cos \omega t) \hat{j}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 2R [(\cos \phi \cos \omega t) \hat{i} + (\sin \phi \cos \omega t) \hat{j}]$$

$$\begin{aligned} \text{Es fácil ver que } |\vec{r}| &= 2R \cdot \cos \omega t \\ &= (4R^2 (\cos^2 \phi \cos^2 \omega t + \sin^2 \phi \cos^2 \omega t))^{1/2} \\ &= 2R (\cos^2 \omega t (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi))^{1/2} \\ &= 2R \cos \omega t // \end{aligned}$$

Es decir, el módulo del vector varía entre $2R$ y $-2R$

Para ver la dirección es fácil, basta notar que tanto para $\hat{i}$ como para $\hat{j}$ tenemos un valor fijo $(\cos \phi, \sin \phi)$ que es la posición inicial de $\vec{r}$, y que estos valores están siendo multiplicados por un mismo número $\cos \omega t$, es decir, se mantiene el ángulo ϕ pero varía el largo del vector $\vec{r}$ en un factor $\cos(\omega t)$, si el multiplicador fuera distinto, por ejemplo $\vec{r} = 2R [(\cos \phi \cos \omega t) \hat{i} + (\sin \phi \sin \omega t) \hat{j}]$ no se cumpliría que el vector oscila en la misma dirección. Gráficamente:

