

**EM 737**

**Análisis de Perturbación a  
Pequeña Señal: Oscilaciones  
de Potencia**

**Prof. Luis Vargas**

**Mayo 2010**

# INDICE

1. Definición del Problema.....	3
2. Aplicación.....	5
A. Modos de Oscilación .....	5
B. Salida de una línea de transmisión.....	7
3. Amortiguación de Oscilaciones.....	9
Ejemplos de Técnicas de Amortiguación .....	9
5. Comentarios y conclusiones .....	17

## 1. Definición del Problema

Consideremos una máquina sincrónica conectada a un sistema grande. Sea  $X_e$  es la reactancia equivalente entre la fem del generador y el sistema,  $P_m$  la potencia mecánica en el eje. Suponiendo notación estándar la ecuación de oscilación esta dada por:

$$M \cdot \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_m - \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \sin(\delta) \quad (1)$$

Considerando una pequeña desviación  $\Delta\delta$  desde un punto de operación estacionario inicial  $\delta_0$  podemos escribir:

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos:

$$M \cdot \frac{d^2(\delta_0 + \Delta\delta)}{dt^2} = P_m - \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \sin(\delta_0 + \Delta\delta) \quad (3)$$

Desarrollando (3) obtenemos:

$$M \cdot \frac{d^2 \delta_0}{dt^2} + M \cdot \frac{d^2 \Delta\delta}{dt^2} = P_m - \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot (\sin \delta_0 \cdot \cos \Delta\delta + \sin \Delta\delta \cdot \cos \delta_0)$$

Dado que  $\Delta\delta$  es pequeño,  $\cos \Delta\delta \cong 1$  y  $\sin \Delta\delta \cong \Delta\delta$ , con esto se tiene que:

$$M \cdot \frac{d^2 \delta_0}{dt^2} + M \cdot \frac{d^2 \Delta\delta}{dt^2} = P_m - \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \sin \delta_0 + \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \cos \delta_0 \cdot \Delta\delta$$

Pero dado que el estado inicial es un estado de equilibrio estacionario se tiene que:

$$M \cdot \frac{d^2 \delta_0}{dt^2} = 0$$
$$P_m - \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \sin(\delta_0) = 0$$

Con lo anterior, obtenemos finalmente:

$$M \cdot \frac{d^2 \Delta \delta}{dt^2} + \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \cos \delta_0 \cdot \Delta \delta = 0 \quad (4)$$

La solución de (4) es una señal sinusoidal dada por la expresión:

$$\Delta \delta(t) = \Delta \delta^0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \Delta \dot{\delta}^0 \cdot \sqrt{\frac{M}{K}} \sin(\omega \cdot t) \quad (5)$$

donde  $\Delta \delta^0$  y  $\Delta \dot{\delta}^0$  son las condiciones iniciales para la desviación del ángulo y su primera derivada, M es la inercia y  $K = \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \sin(\delta_0)$ .

La frecuencia de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \cos \delta_0}{M}} \quad (6)$$

Notemos que para cada valor admisible de  $V_g$ ,  $X_e$  y  $\delta_0$ , tenemos un modo de oscilación distinto para el sistema, es decir, los modos de oscilación del sistema están determinados por la ecuación (6). Reemplazando valores típicos de un sistema real, se obtiene que la frecuencia de oscilación suele tener un valor entre 1 y 2 Hz.

## 2. Aplicación

Consideremos un sistema eléctrico radial compuesto de un generador conectado a una línea de doble circuito. Esta línea se conecta a un transformador de subida, quien a su vez se conecta a un sistema equivalente que puede modelarse como una barra infinita. Los parámetros del sistema son:

Generador: Voltaje tras la reactancia  $E = 1.2 \text{ pu}$ ,  $X^1 = 0.12 \text{ pu}$ ,  $P = 1.5 \text{ pu}$ , Inercia  $I = 0.064 \text{ pu}$ .

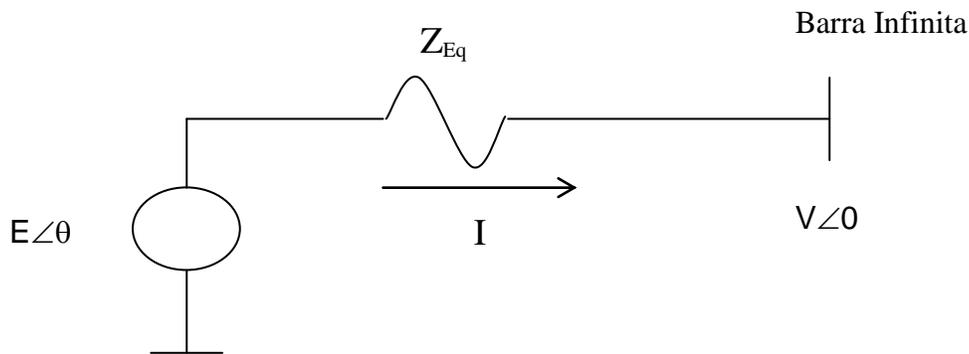
Línea:  $X = 0.2 \text{ pu c/u}$

Transformador:  $X = 0.1 \text{ pu}$

### A. Modos de Oscilación

Determinaremos los modos de oscilación de este sistema. De acuerdo con los antecedentes del estudio, en condiciones de operación normal, el sistema analizado posee una impedancia equivalente igual a la suma de las impedancias de la máquina, más la línea (dos circuitos en paralelo) y el transformador.

$$Z_{Eq} = Z_G + Z_L + Z_T$$



Luego,

$$Z_{Eq} = 0,32 \text{ [pu]};$$

Si se asume barra infinita con valor unitario, la potencia entregada por la fuente atrás de la reactancia, en condiciones permanentes, satisface las siguientes ecuaciones:

$$P = \frac{E \cdot V}{X_{Eq}} \cdot \sin(\theta)$$

$$Q = \frac{E^2}{X} - \frac{E \cdot V}{X} \cdot \cos(\theta)$$

Que de acuerdo con los datos iniciales, la ecuación de potencia activa entrega los siguientes ángulos de adelanto para la tensión del generador:

- Sin contingencia

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{1,5 \cdot 0,32}{1,2 \cdot 1} \right) = 23,58^\circ$$

- Con contingencia

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1,5 \cdot 0,42}{1,2 \cdot 1}\right) = 31,67^\circ$$

De la ecuación de movimiento linealizada, se obtienen los siguientes factores de torque sincronizante:

- Sin contingencia

$$K_s = \frac{E \cdot V}{X_{Eq}} \cdot \cos(\theta) = \frac{1,2 \cdot 1}{0,32} \cdot \cos(23,58) = 3,44$$

- Con contingencia

$$K_s = \frac{E \cdot V}{X_{Eq}} \cdot \cos(\theta) = \frac{1,2 \cdot 1}{0,42} \cdot \cos(31,67) = 2,43$$

Encontrados los valores de los factores de torque sincronizante, se procede a encontrar las ecuaciones que definen los valores propios del sistema, asumiendo constantes de inercia típicos para máquinas térmicas de 2 polos ( $H=4 \text{ MW} \cdot \text{s/MVA}$ ) [1].

Sin contingencia:

$$\begin{vmatrix} -0,125 \cdot K_D - \lambda & -0,125 \cdot 3,44 \\ 314,2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Que se traduce en la siguiente ecuación:

$$\lambda^2 + 0,125 \cdot K_D \cdot \lambda + 135,1 = 0$$

De la expresión anterior, se encuentra la frecuencia natural no amortiguada.

$$\omega_{n0} = \sqrt{135,1} = 11,62 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Leftrightarrow 1,85 \text{ [Hz]}$$

La razón de amortiguamiento:

$$\zeta = \frac{0,125 \cdot K_D}{2 \cdot \omega_{n0}} = 0,00538 \cdot K_D$$

Donde KD está en p.u. Torque / p.u Velocidad.

La frecuencia de amortiguamiento es:

$$\omega_A = \omega_{n0} \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Y los valores propios son:

A partir de las ecuaciones anteriores y para valores de KD variando entre 0, 1, 10 y 100, se puede elaborar la siguiente tabla:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_{n0} \pm j\omega_A$$

$K_D$ [p.u.]	0	1	10	100
$\zeta$ [p.u.]	0	0,00538	0,0538	0,538
$\omega_A$ [rad/s]	11,62	11,62	11,6	9,8
$\lambda$	$\pm j11,62$	$-0,063 \pm j11,62$	$-0,63 \pm j11,6$	$-6,3 \pm j9,8$

Tomando como base un valor de 10 para el coeficiente del torque de amortiguación, los valores propios (conjugados) corresponden a:

$$\lambda_1 = -0.63 + j11.6$$

$$\lambda_2 = -0.63 - j11.6$$

Este sistema corresponde a un sistema de segundo orden con un modo oscilatorio que tiene una frecuencia de amortiguación de 1,846 Hz y una constante de tiempo de atenuación de 1,587 s. Se puede apreciar que la parte real de los valores propios no cambia con respecto al caso original, dado que su valor depende sólo de H y KD.

### **B. Salida de una línea de transmisión**

En condiciones de contingencia, al salir uno de los circuitos, la impedancia equivalente del sistema se transforma en:

$$Z_{Eq} = 0,42 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Con contingencia la ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} -0,125 \cdot K_D - \lambda & -0,125 \cdot 2,43 \\ 314,2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

De la primera expresión se determinan los valores propios en función de los factores de amortiguación (KD), que resultan:

$$\lambda^2 + 0.125 \cdot K_D \cdot \lambda + 95.43 = 0$$

$$\omega_{n0} = \sqrt{95,43} = 9,77 \left[ \frac{rad}{s} \right] \Leftrightarrow 1,55 [Hz]$$

$$\zeta = \frac{0,125 \cdot K_D}{2 \cdot \omega_{n0}} = 0,0064 \cdot K_D$$

Utilizando las mismas expresiones para el cálculo de la frecuencia de amortiguamiento y los valores propios, se encuentra la siguiente tabla, para las mismas variaciones de KD:

$K_D$ [p.u]	0	1	10	100
$\zeta$ [p.u]	0	0,0064	0,064	0,64
$\omega_A$ [rad/s]	9,77	9,77	9,75	7,5
$\lambda$	$\pm j9,77$	$-0,063 \pm j9,77$	$-0,63 \pm j9,75$	$-6,25 \pm j7,5$

De lo anterior, tomando como base un valor de 10 para el coeficiente del torque de amortiguación, los valores propios (conjugados) corresponden a:

$$\lambda_1 = -0.63 + j9.75$$

$$\lambda_2 = -0.63 - j9.75$$

Este sistema corresponde a un sistema de segundo orden con un modo oscilatorio que tiene una frecuencia de amortiguación de 1,55 Hz y una constante de tiempo de atenuación de 1,587 s.

Los valores anteriores demuestran que el sistema es estable independientemente de la cantidad de circuitos conectados.

### 3. Amortiguación de Oscilaciones

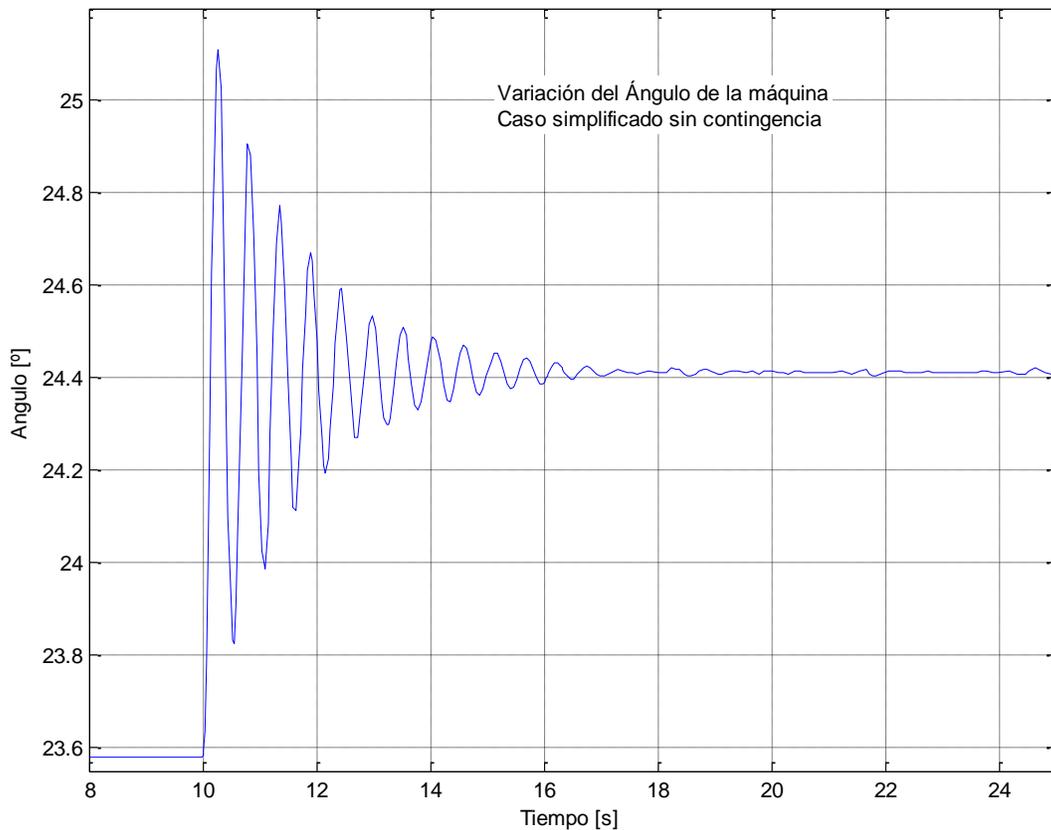
Para amortiguar más rápidamente las oscilaciones, debemos usar acciones que impacten (en valor absoluto) a la parte real de los valores propios. Los valores propios corresponden a funciones que dependen de las características propias de la máquina, la impedancia equivalente y las tensiones inducidas del generador. Todas estas variables afectan el torque que se traduce en una variación de  $K_S$ .

$$K = \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \sin(\delta_0)$$

Otro factor que podría ser utilizado sería la disponibilidad de un PSS, que controlaría la excitación de la máquina ( $V_g$ ) cuando se produjeran las oscilaciones.

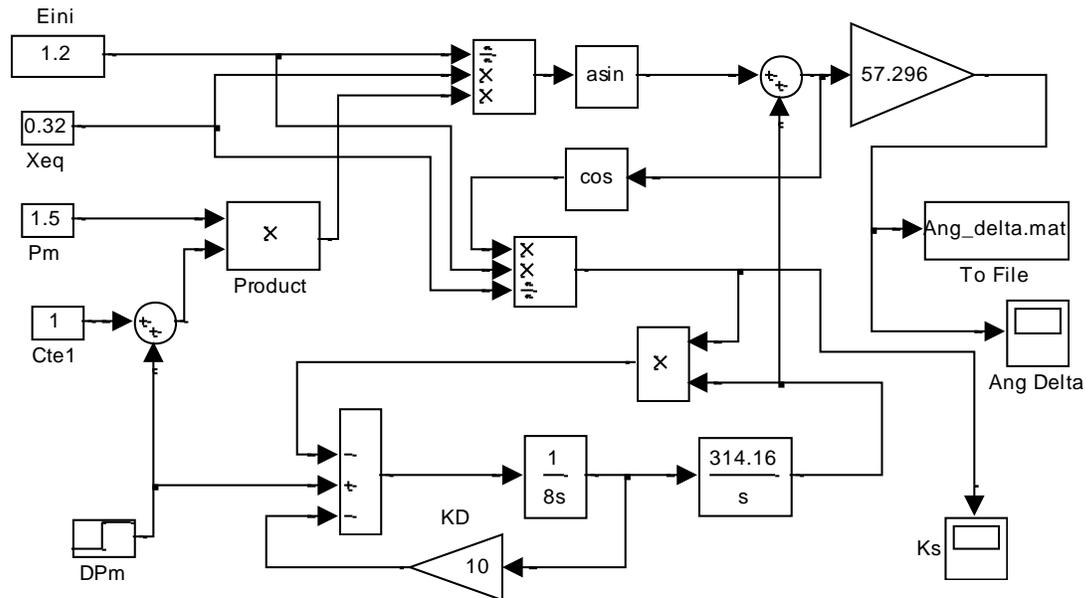
#### Ejemplos de Técnicas de Amortiguación

En este modelo se ha supuesto que la variación de la potencia en el eje es del 5% positiva. Con estos valores la curva obtenida para la variación del ángulo de la máquina, es la siguiente.



Se puede apreciar que el período coincide con el equivalente a la frecuencia de amortiguación calculado inicialmente.

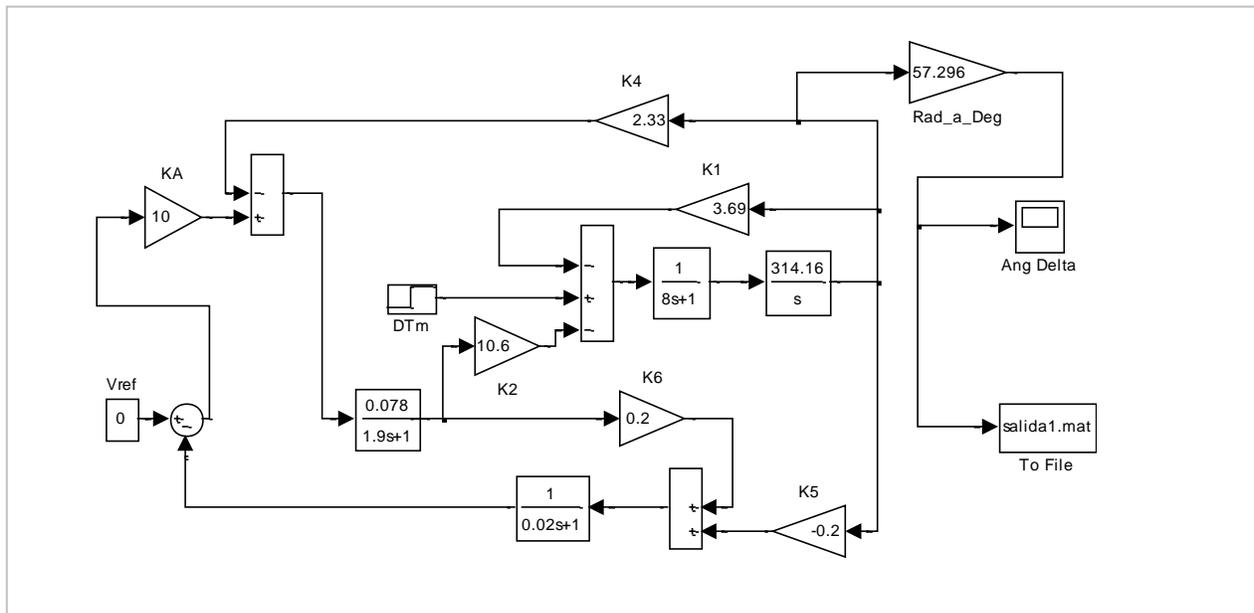
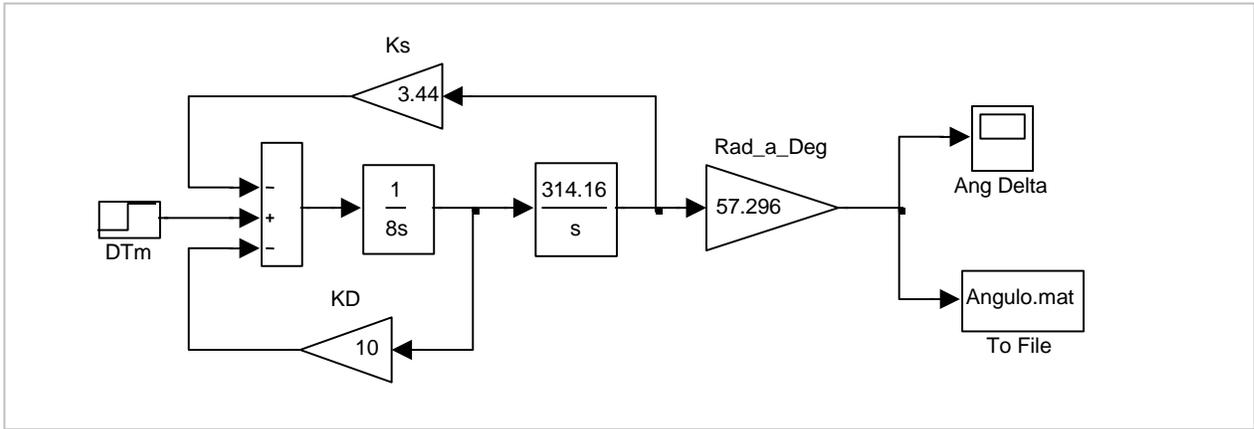
En este caso se ha asumido que el valor de  $K_S$  no varía y que tampoco lo hace el ángulo inicial, lo cual, en estricto rigor no es cierto, pues ambos factores dependen de la variación de la potencia. Esto queda de manifiesto en el hecho que la potencia final entregada, después de la perturbación, es un 5% mayor; por lo que el ángulo final debe ser  $24,83^\circ$  y no  $24,4^\circ$  como se podría deducir del modelo básico. Un modelo que incluye la variación del ángulo y de  $K_S$  sería uno como el de la figura siguiente:



En este caso el ángulo de la máquina es calculado para todo momento, incluido el cambio de potencia; No obstante, se produce una perturbación mayor del ángulo de la máquina, producto de no eliminar el aporte del cambio de potencia en el eje (se suma dos veces). Por lo anterior, el modelo previo es más aproximado para el estudio en cuestión.

Dado que el interés se centra en las variaciones de ángulo, y no en el valor total, se obviaré la parte inicial, para graficar solamente las variaciones de ángulo de la máquina. El modelo final será uno como el de la figura de la página siguiente.

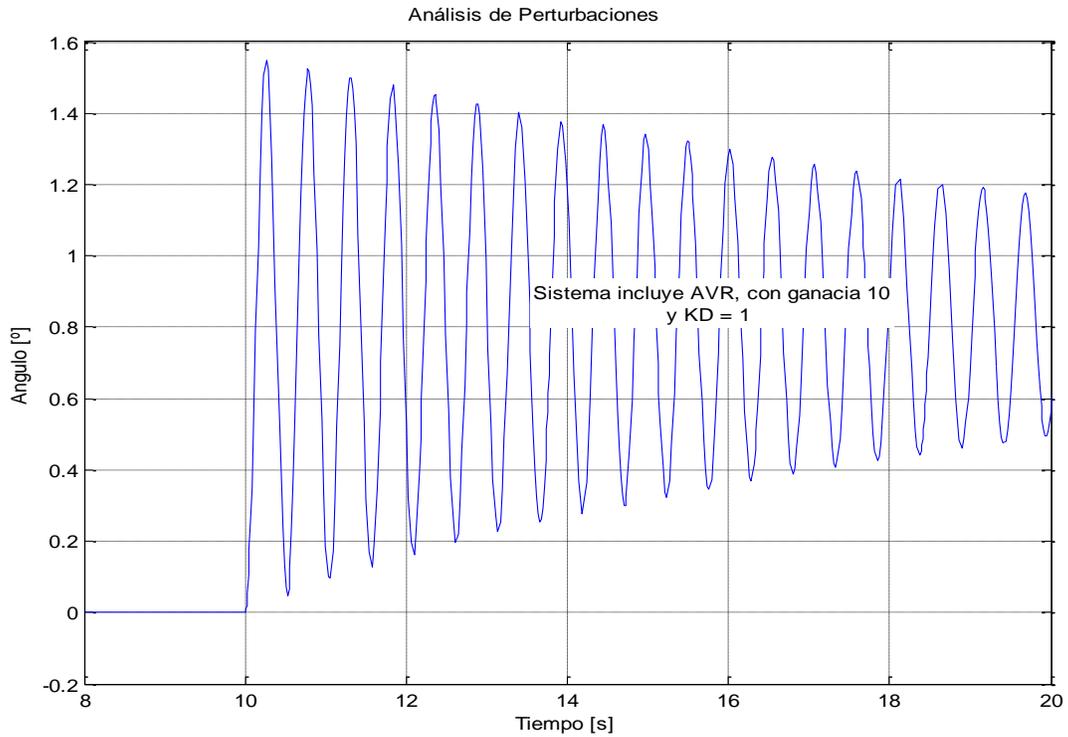
A ese modelo se le agregará el efecto del regulador de tensión de la máquina, para obtener un diagrama como el que se aprecia a continuación del esquema simplificado.



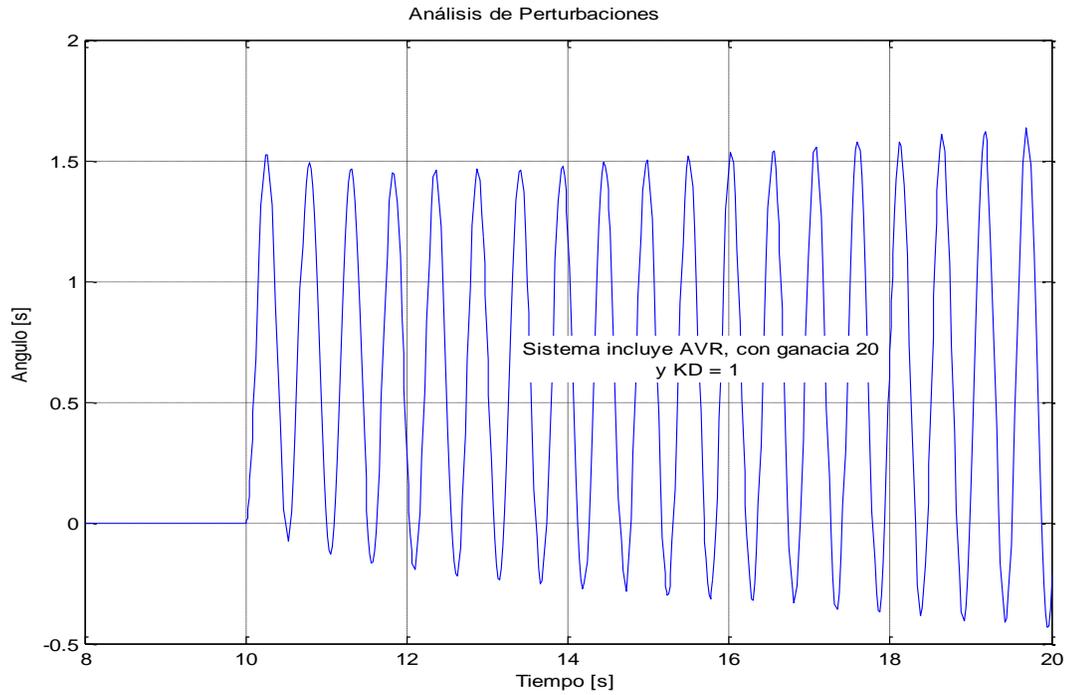
En este caso se han utilizado parámetros típicos de máquinas térmicas [1], que no viene al caso analizar pues se trata de determinar el efecto de la variación de la excitación en las oscilaciones de la máquina.

Para el primer análisis se ha supuesto que la función de transferencia del excitador es una constante e igual a 10; y que además, el factor  $K_D$  (coeficiente del torque de amortiguación) tienen un valor 1 (provoca valores propios con poca amortiguación, tal como se analizó en forma teórica). Los resultados de estas suposiciones pueden verse en el gráfico de la figura de la página siguiente.

Es claro que no existe mucha amortiguación, dado que las oscilaciones producidas después de la perturbación son prolongadas.

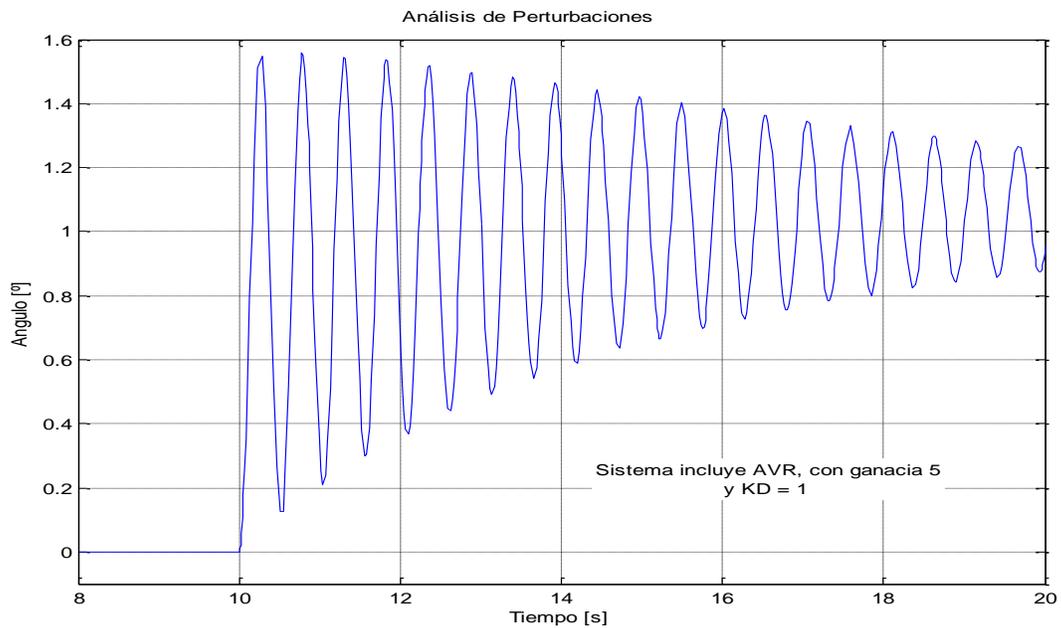


Si al sistema anterior se le aumenta la ganancia del AVR (20), sin modificar el  $K_D$  (característico de la máquina), se obtiene un resultado como el de la figura siguiente.



En este caso se puede apreciar que la máquina entra en inestabilidad, debido a la ganancia del excitador.

Si en vez de aumentar la ganancia del excitador se reduce a un valor tal como 5, se obtiene un sistema más estable, tal como lo muestra la siguiente figura.



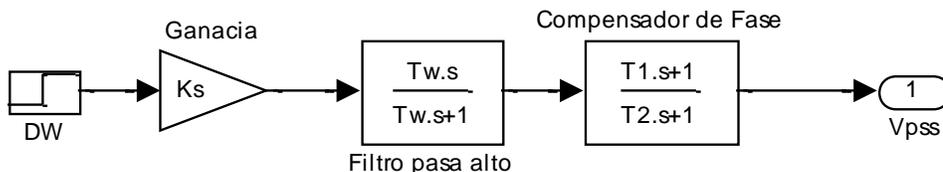
Lo anterior demuestra que un adecuado manejo de la ganancia del excitador permite controlar las eventuales inestabilidades que se pueden presentar para una máquina cualquiera.

Es importante tener presente que la elección de la ganancia debe ser controlada, puesto que se produce un aumento del ángulo de estabilización de la máquina, lo cual en casos extremos podría ser crítico.

Aun cuando el control de la ganancia del excitador pareciera ser la solución a los problemas de estabilidad, podría ser complejo el modificar la ganancia de tal sistema. Por esta razón se podría utilizar un elemento más elaborado, que introduzca una variación en la tensión inducida, tal como podría ser la aplicación de un PSS; donde el objetivo principal de este equipo sería compensar las oscilaciones producidas.

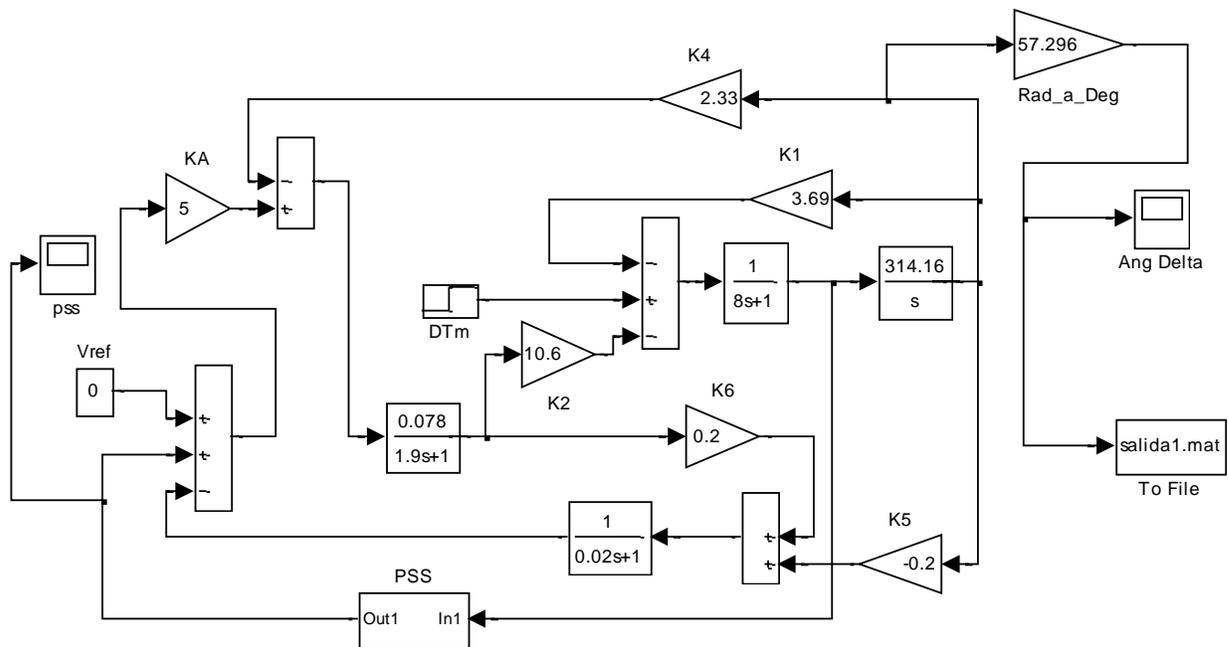
Es claro que un elemento como el PSS que compense completamente las oscilaciones debe provocar oscilaciones de igual magnitud pero desfasadas en  $180^\circ$ , de tal modo que se anulen los efectos. Este método simple en su principio, posee una complejidad adicional que consiste en que los ángulos y frecuencias a ser compensadas dependen de las condiciones del sistema. Por tal razón, un sistema como este debe ser adaptivo a las condiciones operacionales.

Un modelo de PSS podría ser como el de la figura de la página siguiente.



Es claro que este modelo no puede realizar la función ideal, y por lo tanto, compensará en forma adecuada en algunos casos y en otros no existirá una buena compensación debido a que las constantes del modelo dependen de la impedancia del sistema equivalente, lo cual cambia con las condiciones de operación del sistema.

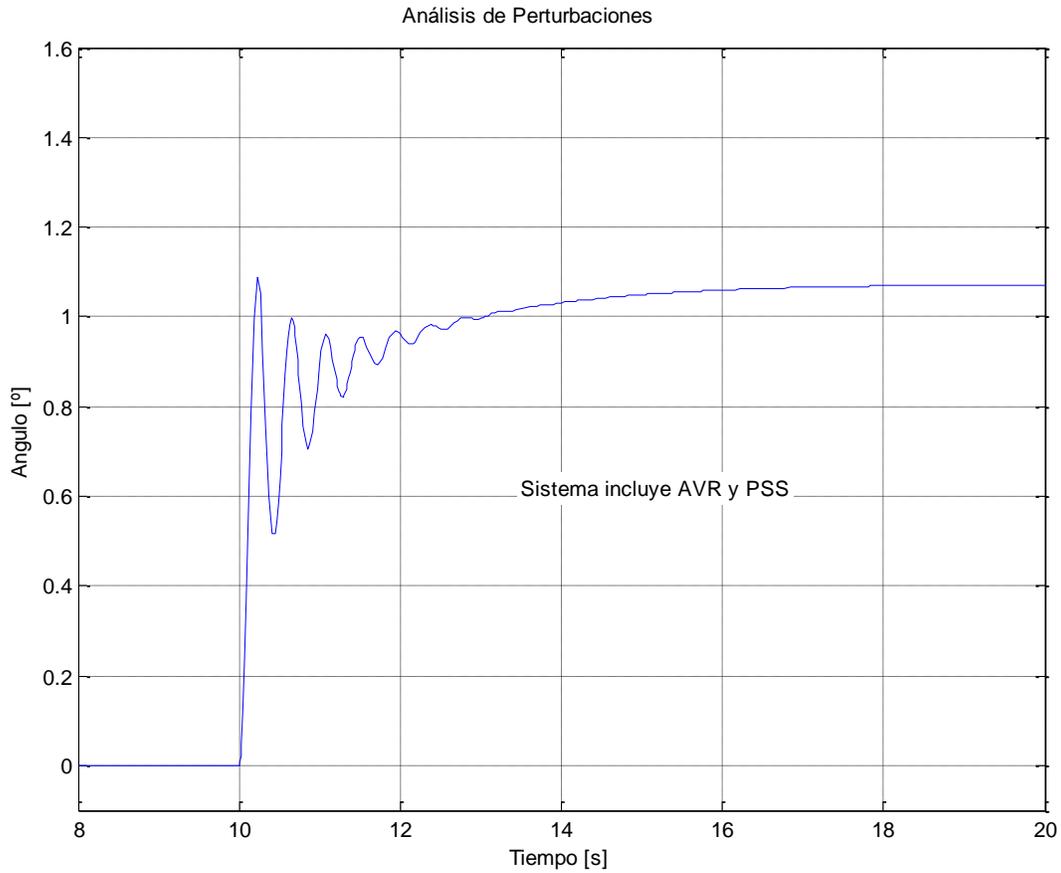
Al agregar este elemento en el diagrama con AVR, se obtiene un diagrama como el siguiente:



En este modelo, no se han cambiado los parámetros de la excitación, y se ha utilizado como parámetros del PSS los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 K_S &= 80 \\
 T_W &= 1.3 \\
 T_1 &= 0.44 \\
 T_2 &= 0.1
 \end{aligned}$$

Los resultados de este modelo se pueden apreciar en la figura de la página siguiente.



Es claro que el PSS amortigua las oscilaciones considerablemente, y en este caso particular, permite estabilizar el sistema en aproximadamente 3 segundos. Lo que representa un cambio notorio si se compara con los 30 segundos que tendría el control de excitación en forma independiente.

## **5. Comentarios y conclusiones**

De los análisis realizados se desprende que los controles de excitación de las máquinas por lo general pueden mantener el control de las oscilaciones producidas por variaciones pequeñas en torno a los puntos normales de operación de las máquinas. No obstante, existirán casos en los cuales la operación de las unidades se encuentra cercana a los límites de inestabilidad.

Una forma simple de aminorar las oscilaciones prolongadas en puntos cercanos a los límites de estabilidad, es la utilización de dispositivos PSS, los cuales con una función de transferencia de oposición de fase, permiten anular los efectos de las oscilaciones.

## **Bibliografía**

- [1] “Power System Stability and Control”; P. Kundur; McGraw-Hill.

## ANEXO

- a) Se simuló la ecuación de deslizamiento (1) en Matlab Simulink. Las condiciones iniciales para dicha ecuación están dadas por el estado inicial del sistema cuando este se encuentra en equilibrio dinámico, es decir, la condición inicial para el ángulo de carga esta dada por la ecuación:

$$P_g = \frac{V_g \cdot V}{X_e} \cdot \text{sen}(\delta_0)$$

donde  $P_g=1.5$  0/1 ,  $V_g=1.2$  0/1 y  $X_e=0.2+0.1+0.12=0.42$  0/1, estan dados por enunciado. Con esto, el valor inicial para el angulo es  $\delta_0 = 0.5527[\text{rad}]$ . Las condiciones iniciales de la primera derivada se suponen nulas.

Se simulo una contingencia en la que la potencia mecánica del generador aumenta de 1.5 a 1.6 0/1. El resultado de la simulación se muestra en la figura 1.

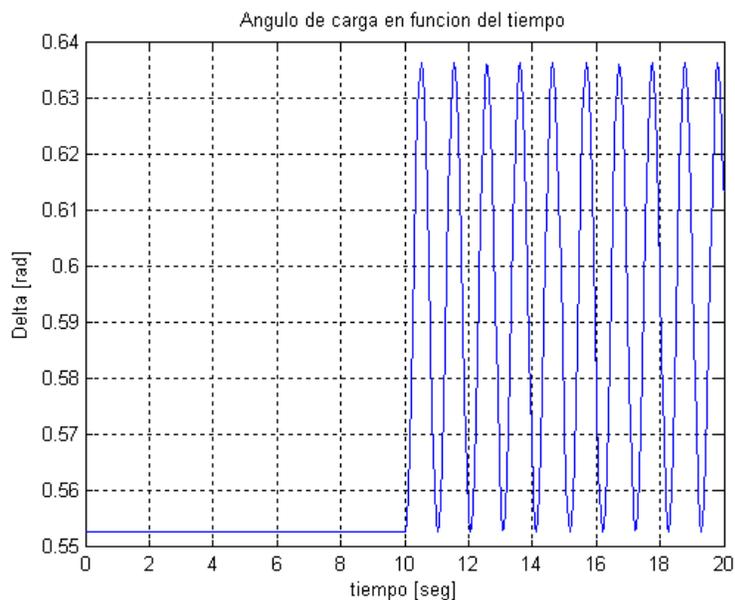


Figura 1

Vemos claramente como el ángulo  $\delta$  oscila en torno a un valor medio distinto de cero, el valor peak to peak de las oscilaciones es de aproximadamente 0.085 rad y el periodo de oscilación es de aproximadamente 1 seg, la amplitud de las oscilaciones depende de el estado inicial del sistema como puede apreciarse en la ecuación 5. Para controlar dichas oscilaciones podemos utilizar principalmente dos métodos, el primero es haciendo variar la reactancia del sistema en contrafase con la señal oscilatoria. La figura 2 presenta el modelo en Simulink utilizado para las simulaciones, en el podemos ver el lazo de control utilizado, en el que con las variaciones oscilatorias del angulo (y por lo tanto de

la potencia) se genera un control realimentado derivativo con una ganancia  $K$  con el que se varia la reactancia del sistema.

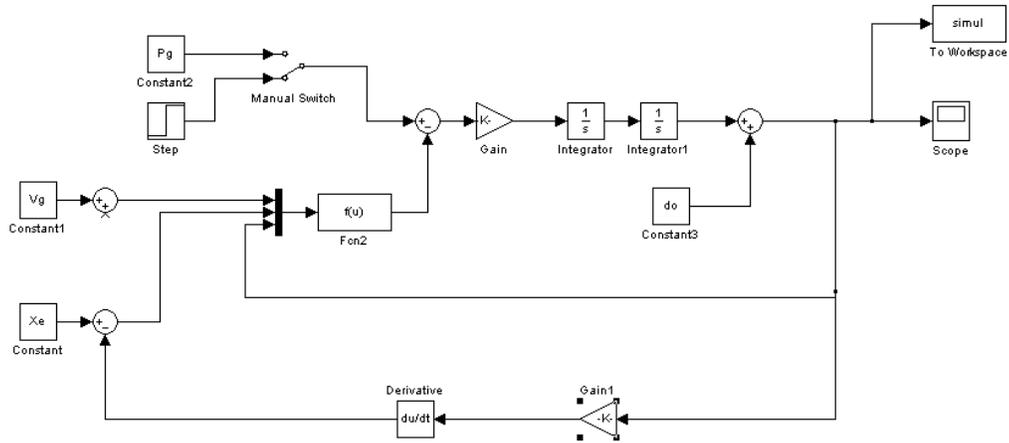


Figura 2.

La idea del control derivativo es la siguiente. Al derivar la señal oscilatoria lo que obtendremos es una senoide que estará desfasada en  $90^\circ$  de la señal oscilatoria original, es decir, a contrafase. Por lo tanto, la reactancia variara en forma proporcional inversa a la amplitud de las oscilaciones tendiendo a anularlas. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 3 y 4 para valores de  $K=0.01$  y  $K=0.5$ .

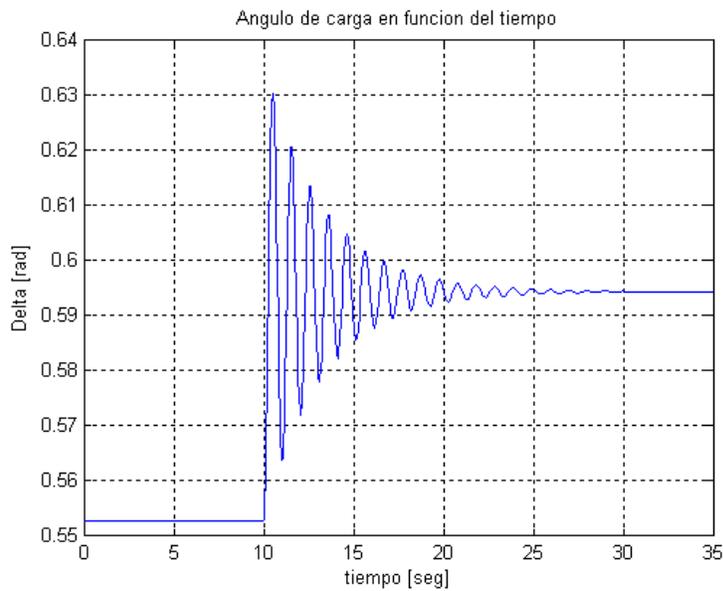


Figura 3: Angulo en fn. del tiempo para  $K=0.01$ .

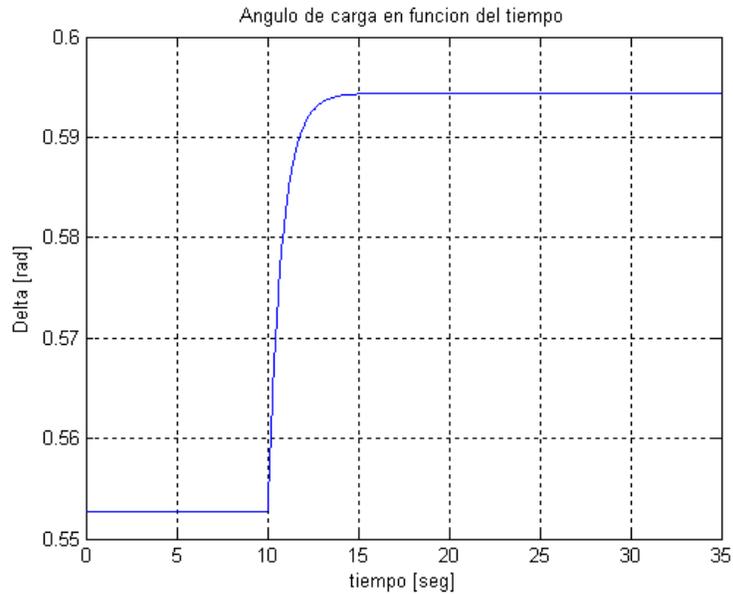


Figura 4: Angulo en fn. del tiempo para  $K=0.5$ .

Notemos que en ambos casos se llega al mismo valor de régimen permanente  $\Delta\delta = 0.5944[\text{rad}]$ . Vemos que en el primer caso las oscilaciones son amortiguadas en aproximadamente 15 segundos mientras que en el segundo se llega a régimen permanente en aproximadamente 5 segundos.

Notemos que este control de la reactancia puede ser logrado utilizando equipos FACTS.

El segundo método para controlar las oscilaciones de potencia es mediante un control realimentado de la tensión del generador. Esto se discutirá en el punto siguiente.

- b) El modelo de control realimentado para la tensión del generador se presenta en la figura 5.

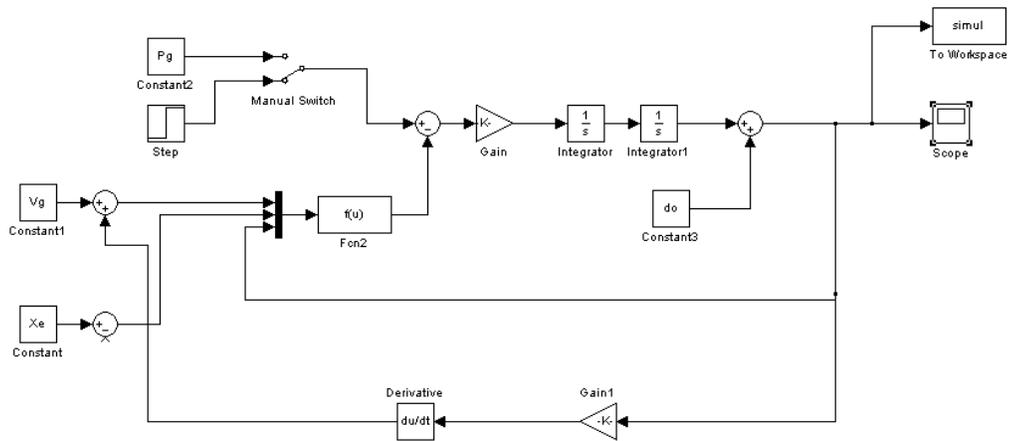


Figura 5.

El argumento es similar al del punto anterior. Al hacer un control derivativo, lo que se hace es variar la tensión del generador en forma proporcional a una señal que esta en contrafase con la señal oscilatoria, con esto se contrarrestan rápidamente las oscilaciones de ángulo y por lo tanto las de potencia. Los resultados obtenidos en las simulaciones se muestran en las figuras 6 y 7, para dos valores de la ganancia del control derivativo.

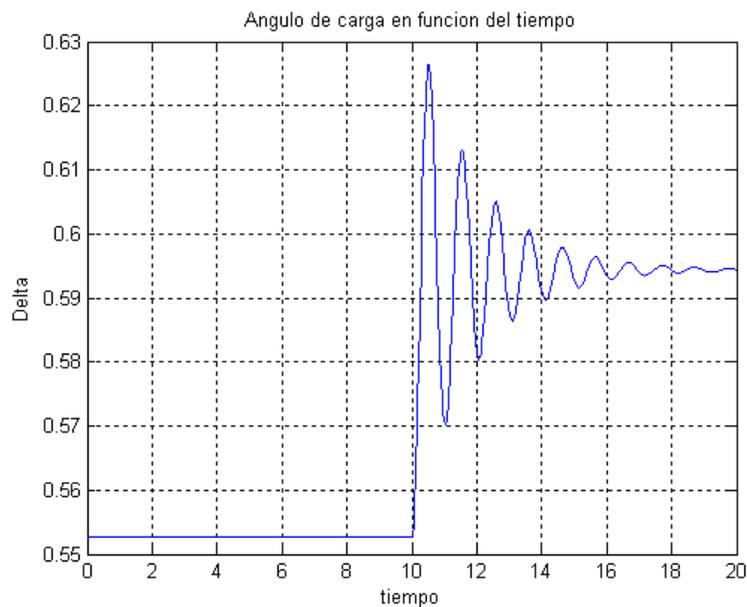


Figura 6: Angulo en función del tiempo para  $K=0.05$ .

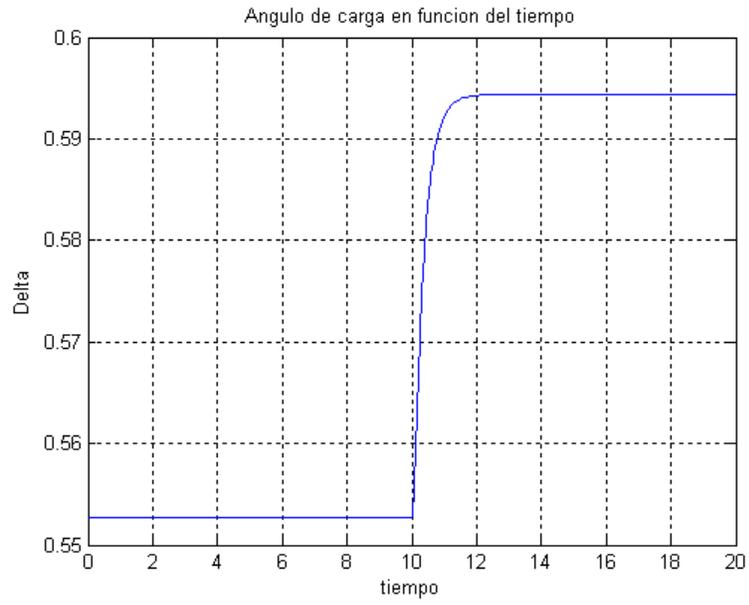


Figura 7: Angulo en función del tiempo para  $K=0.7$ .