

## CONTROL BASADO EN MODELOS DE TAKAGI & SUGENO

Los modelos difusos propuestos por Takagi y Sugeno (1985), tienen la particularidad de que las consecuencias de cada regla son ecuaciones lineales. Esta característica permite que para cada subespacio lineal o regla del modelo, se pueda derivar un controlador basado en la teoría de control lineal. Por lo tanto, se puede obtener un controlador difuso, que combine las acciones de los controladores lineales de cada regla.

La secuencia de pasos, propuesta por Sugeno y Kang (1986), para diseñar un controlador basado en modelo difuso consiste en:

a) Identificar un modelo basado en reglas como el siguiente:

$$R_i : \text{Si } Z_1 \text{ es } F_{l_i} \text{ y } \dots \text{ y } Z_m \text{ es } F_{m_i} \\ \text{entonces } Y_i = p_0^i + p_1^i X_1 + \dots + p_k^i X_k \quad (*)$$

$$R_i : \text{Si } Z_1 \text{ es } F_{l_i} \text{ y } \dots \text{ y } Z_m \text{ es } F_{m_i} \\ \text{entonces } u_i = f_i(Y_i, X_1, \dots, X_k)$$

e) Por último, cabe mencionar que para calcular la acción de control final se utiliza la ponderación de la salida de cada regla por su respectivo grado de cumplimiento  $W_i$ . De esta manera, la acción de control final  $u$  es:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^M (W_i u_i)}{\sum_{i=1}^M W_i}$$

donde  $W_i$  es el grado de activación de la regla  $i$  y  $M$  es el número de reglas del modelo difuso.

## CONTROLADOR LQR DIFUSO

### Control lineal cuadrático (LQR)

El diseño del controlador lineal cuadrático (LQR: "Linear Quadratic Regulator") se realiza considerando un modelo lineal en variables de estado del sistema y minimizando la siguiente función de costos (Astrom, 1984):

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

donde  $x$  es el vector de variables de estado,  $u$  es la variable manipulada.

La solución de este problema se obtiene resolviendo la siguiente ecuación de Ricatti para la matriz  $P$ :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

donde  $A$  y  $B$  son las matrices del modelo en variables de estado linealizado.

De esta manera, el control obtenido está dado por:

$$u = -Kx$$

donde  $K = R^{-1}B^T P$

Para el diseño del controlador LQR difuso, se considera el siguiente modelo difuso en variables de estado:

$$R_i : \text{Si } z_1 \text{ es } Fl_i \text{ y } \dots \text{ y } z_m \text{ es } Fm_i \\ \text{entonces } \dot{x} = A^i x + B^i u$$

donde  $z_j$  son las variables de entrada del modelo difuso y  $x$  es el vector de variables de estado

Por lo tanto, el controlador basado en un modelo difuso consiste en una base de reglas con la siguiente estructura:

$$R_i : \text{Si } z_1 \text{ es } Fl_i \text{ y } \dots \text{ y } z_m \text{ es } Fm_i \\ \text{entonces } u_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

donde la ley de control  $f_i$  corresponde a un controlador lineal cuadrático obtenido a partir del modelo lineal en variables de estado para cada regla  $i$  del modelo difuso

Entonces,

$$R_i : \text{Si } z_1 \text{ es } Fl_i \text{ y } \dots \text{ y } z_m \text{ es } Fm_i \\ \text{entonces } u_i = -k_1^i x_1 - \dots - k_n^i x_n$$

## CONTROLADOR BASADO EN MODELOS DIFUSOS POR UBICACIÓN DE POLOS

Debido a que las consecuencias de los modelos difusos de Takagi & Sugeno son sistemas lineales, se puede diseñar controladores en variables de estado difusos por asignación de polos (Kang y Lee, 1995).

En este caso, se considera el siguiente modelo difuso de Takagi & Sugeno en variables de estado:

$$R_i : \text{Si } z_1 \text{ es } Fl_i \text{ y } \dots \text{ y } z_m \text{ es } Fm_i \\ \text{entonces } x^i(k+1) = A^i x(k) + B^i u(k) \\ y(k) = Cx(k)$$

Entonces, el vector en variables de estado a partir del modelo difuso es:

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) x^i(k+1)}{\sum_{i=1}^M w^i(z)}$$

El controlador difuso está compuesto por las premisas del modelo difuso. Entonces, la base de reglas del controlador está dada por:

$$R_i : \text{Si } z_1 \text{ es } Fl_i \text{ y } \dots \text{ y } z_m \text{ es } Fm_i \\ \text{entonces } u^i(k) = -G^i x(k)$$

donde  $G^i$  es una matriz de ganancia realimentada en el estado.

## CONTROLADOR BASADO EN MODELOS DIFUSOS POR UBICACIÓN DE POLOS

Debido a que las consecuencias de los modelos difusos de Takagi & Sugeno son sistemas lineales, se puede diseñar controladores en variables de estado difusos por asignación de polos (Kang y Lee, 1995).

En este caso, se considera el siguiente modelo difuso de Takagi & Sugeno en variables de estado:

$$R_i : \text{Si } z_1 \text{ es } Fl_i \text{ y } \dots \text{ y } z_m \text{ es } Fm_i$$

$$\text{entonces } x^i(k+1) = A^i x(k) + B^i u(k)$$

$$y^i(k) = Cx^i(k)$$

Entonces, el vector en variables de estado a partir del modelo difuso es:

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) x^i(k+1)}{\sum_{i=1}^M w^i(z)}$$

El controlador difuso está compuesto por las premisas del modelo difuso. Entonces, la base de reglas del controlador está dada por:

$$R_i : \text{Si } z_1 \text{ es } Fl_i \text{ y } \dots \text{ y } z_m \text{ es } Fm_i$$

$$\text{entonces } u^i(k) = -G^i x(k)$$

donde  $G^i$  es una matriz de ganancia realimentada en el estado.

En este método, la ganancia  $G^i$  debe ser obtenida tal que el sistema difuso con el controlador difuso tenga los polos deseados. Para esto, se formula el siguiente teorema.

### Teorema

Se considera que el vector de ganancia  $G^i$  satisface:

$$\phi = A^i - B^i G^i$$

donde  $\phi$  es la matriz de transición de estados que tiene los polos deseados. Además, se considera que la acción de control debe ser obtenida a partir de la relación:

$$\sum_{i=1}^M w^i(z) B^i u(k) = \sum_{i=1}^M w^i(z) B^i u^i(k) \quad (*)$$

$$u(k) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) B^i u^i(k)}{\sum_{i=1}^M w^i(z) B^i}$$

Entonces, la matriz de transición del sistema difuso con controlador difuso es  $\phi$  y tiene los polos deseados.

### Demostración

Se considera que  $u(k)$  obtenido de la ecuación (\*) es usado como entrada al sistema, entonces las variables de estado del modelo difuso son:

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) x^i(k+1)}{\sum_{i=1}^M w^i(z)}$$

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) (A^i x(k) + B^i u(k))}{\sum_{i=1}^M w^i(z)}$$

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) A^i x(k) + \sum_{i=1}^M w^i(z) B^i u^i(k)}{\sum_{i=1}^M w^i(z)}$$

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) A^i x(k) - \sum_{i=1}^M w^i(z) B^i G^i x(k)}{\sum_{i=1}^M w^i(z)}$$

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) (A^i - B^i G^i) x(k)}{\sum_{i=1}^M w^i(z)}$$

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^M w^i(z) \phi x(k)}{\sum_{i=1}^M w^i(z)} = \phi x(k)$$

Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado tiene los polos deseados.

### Ejemplo

Diseñar un controlador difuso en variables de estado para el siguiente sistema difuso, tal que los polos en lazo cerrado sean  $0.4 \pm 0.4j$ :

$R_1$  : Si  $y(k)$  es  $S_1$

$$\text{entonces } x^1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6 & 1.6 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2 \end{bmatrix} u(k)$$

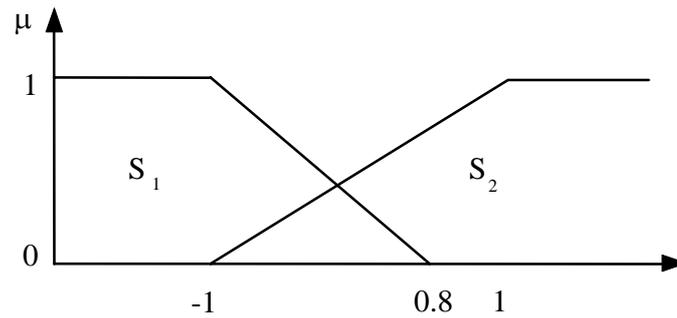
$$y(k) = [0 \quad 1] x(k)$$

$R_2$  : Si  $y(k)$  es  $S_2$

$$\text{entonces } x^2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9 & 1.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 1] x(k)$$

En la siguiente figura se presentan las funciones de pertenencia para las premisas:



Entonces, el controlador difuso está dado por:

$R_1$  : Si  $y(k)$  es  $S_1$

$$\text{entonces } u^1(k+1) = -[-0.233 \quad 0.667]x(k)$$

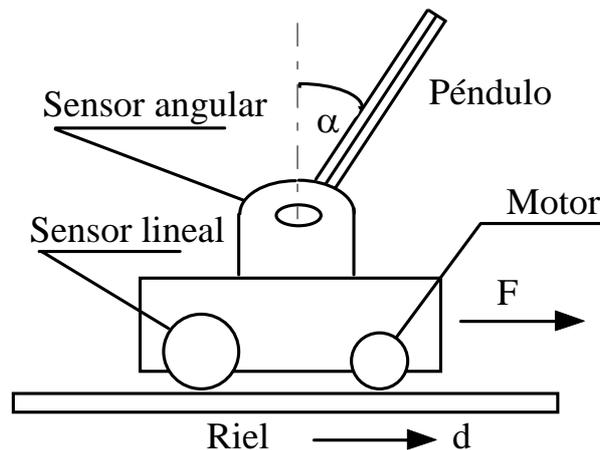
$R_2$  : Si  $y(k)$  es  $S_2$

$$\text{entonces } u^2(k+1) = -[-0.4143 \quad 0.7143]x(k)$$

Por lo tanto, la acción de control está dada por:

$$u(k) = \frac{1.2w^1u^1(k) + 1.4w^2u^2(k)}{1.2w^1 + 1.4w^2}$$

## CONTROLADOR LQR DIFUSO PARA UN PENDULO INVERTIDO



El péndulo invertido está compuesto por una viga montada sobre un carro que desliza sobre un riel. El motor de corriente continua permite ejercer la fuerza sobre el sistema y un potenciómetro acoplado a él por un mecanismo de engranaje mide la posición del carro. Además, un potenciómetro montado en el eje de rotación permite medir el ángulo del péndulo con respecto a la vertical.

Se considera como variables de entrada al controlador o variables controladas el ángulo y la velocidad angular del péndulo, y la variable de salida o manipulada es la fuerza aplicada al motor. No se considera el control de la posición del carro.

## Controlador LQR difuso

En este caso, para diseñar el controlador difuso para la estabilización angular de un péndulo invertido se deriva el siguiente modelo difuso del proceso:

$R_i$ : Si  $x_1$  es  $A_i$  y  $x_2$  es  $B_i$

$$\text{entonces } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son las variables de estado del proceso  $\alpha$  y  $\dot{\alpha}$ ,  $u$  es la variable manipulada  $F$ . Además,  $A_i$  y  $B_i$  son los conjuntos difusos para  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente.

En este caso, debido a que el proceso es inestable y no es posible la obtención de datos en lazo abierto, en vez de realizar una identificación del modelo por alguno de los métodos descritos anteriormente, los coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_j$  y  $c_j$  son determinados a partir de la linealización de la siguiente ecuación fenomenológica del proceso en torno a diferentes puntos de operación.

$$\ddot{\alpha} = \frac{(M + m)g \operatorname{sen} \alpha - F \operatorname{cos} \alpha - \frac{m\ell}{2} \dot{\alpha}^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\frac{2(M + m)\ell}{3} - \frac{m\ell \operatorname{cos}^2 \alpha}{2}}$$

Por lo tanto, el controlador basado en un modelo difuso consiste en una base de reglas con la siguiente estructura:

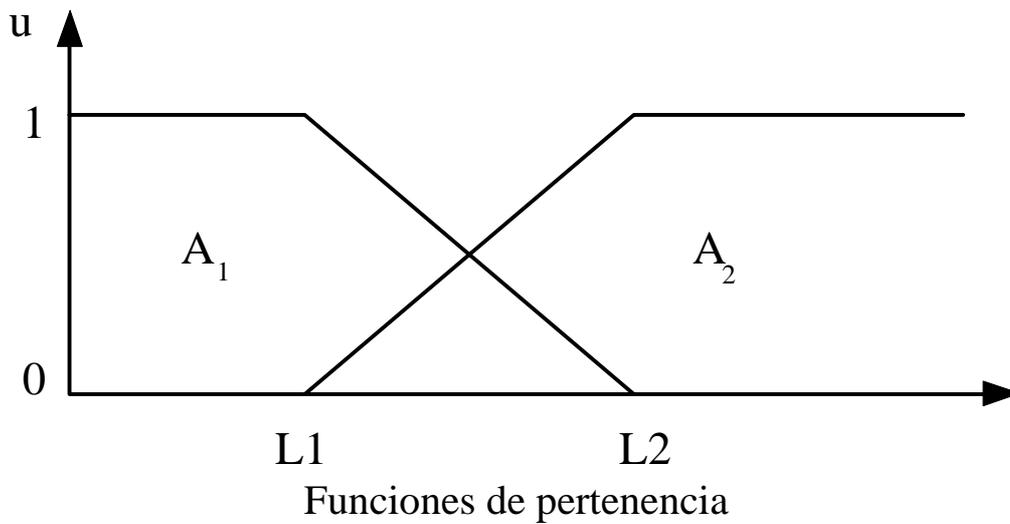
$$R_i: \text{ Si } \alpha \text{ es } A_i \text{ y } \dot{\alpha} \text{ es } B_i \text{ entonces } F_i = -k_1^i \alpha - k_2^i \alpha' + k_0^i$$

donde  $k_j^i$  son los coeficientes de la regla  $i$  para la variable de estado  $j$ , ( $j = 1, 2$ ) y  $k_0^i$  es un sesgo dado por la diferencia entre el punto de operación utilizado para la linealización correspondiente a la regla  $i$  y el estado de equilibrio ( $\alpha = 0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$ ).

Los puntos de operación para la linealización se presentan en la siguiente tabla.

Regla	$\alpha$ (rad)	$\dot{\alpha}$ (rad/seg)
1	-0.6981 (-40°)	-1.7453 (-100°/seg)
2	-0.6981 (-40°)	1.7453 (100°/seg)
3	0.6981 (40°)	-1.7453 (-100°/seg)
4	0.6981 (40°)	1.7453 (100°/seg)

Los parámetros de las funciones de pertenencia (ver figura) han sido determinados mediante un procedimiento de prueba y error, y sus valores se presentan en la siguiente tabla.



Parámetros de las premisas

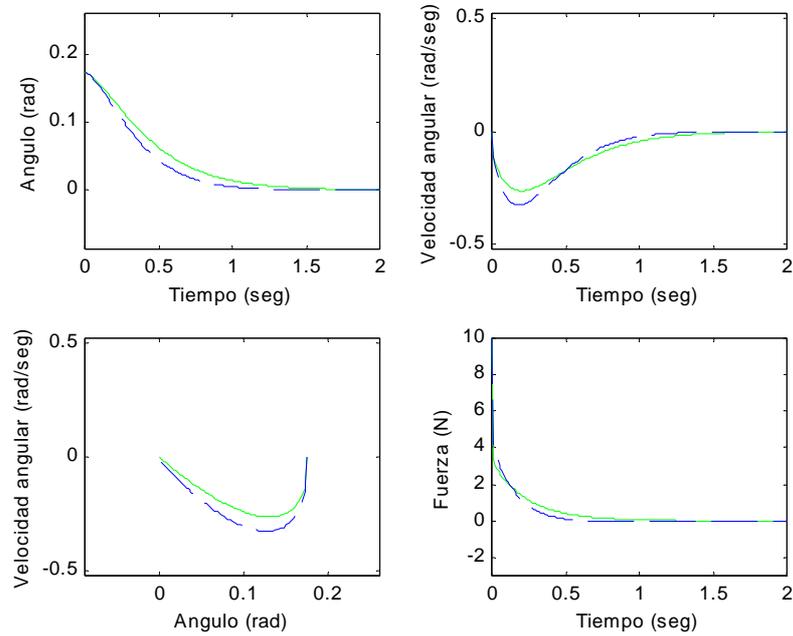
	L1	L2
$\alpha$ (rad)	-0.3491 (-20°)	0.3491 (20°)
$\dot{\alpha}$ (rad/seg.)	-0.8727 (-50°/seg.)	0.8727 (50°/seg.)

Los coeficientes de las consecuencias, correspondientes a los de un controlador LQR para cada regla, se presentan a continuación.

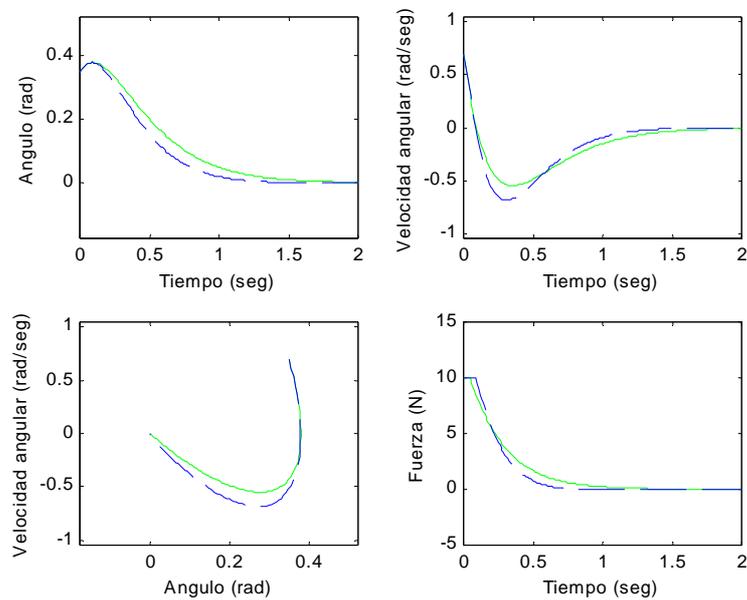
Coeficientes de las consecuencias

Regla	k1	k2	k <sub>0</sub>
1	-20.2443	-5.9888	-2.0787
2	-20.2443	-6.2131	-2.0787
3	-20.2441	-6.2131	2.0787
4	-20.2441	-5.9887	2.0787

En las siguientes figuras, se presentan los resultados del LQR difuso para el péndulo invertido.



Condiciones iniciales:  $\alpha_0 = (10^\circ) 0.1745$  rad,  $\dot{\alpha}_0 = 0$ . Verde :LQR, Azul: LQR difuso.



Condiciones iniciales:  $\alpha_0 = (20^\circ) 0.349$  rad,  $\dot{\alpha}_0 = (40^\circ/\text{seg}) 0.6981$ . Verde :LQR, Azul: LQR difuso.

En la siguiente tabla se presentan los valores de la función de costos del regulador LQR, para todas las pruebas realizadas con diferentes condiciones iniciales.

Valores de la función de costos.

$\alpha_0$ (rad)	0.1745 (10°)	0.1745 (10°)	0.2618 (15°)	0.3490 (20°)
$\dot{\alpha}_0$ (rad/seg)	0	0.3490 (20°/seg)	0.5216 (30°/seg)	0.6981 (40°/seg)
LQR	4956	8437	19574	37240
LQR difuso	4578	7747	17805	34635

Finalmente, tomando en cuenta las figuras y los valores de la función de costos podemos decir que el controlador lineal cuadrático difuso (LQR difuso) presenta el mejor desempeño en las pruebas por simulación.