EL 6000
Generación de Energía Eléctrica con Fuentes Renovables

Clase4: Sistemas Trifásicos

Luis Vargas
AREA DE ENERGIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

AGENDA

- Repaso
- Potencia activa y reactiva

AGENDA

Conceptos matemáticos básicos para el estudio de sistemas trifásicos

- Introducción
- Sistemas de corriente alterna: términos y modelos
- Sistemas equilibrados
- Equivalentes monofásicos
- Potencia en sistemas alternos

Introducción

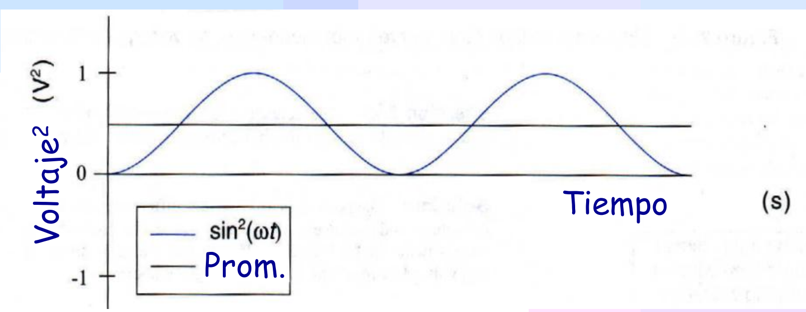
Concepto de Valor Efectivo o RMS

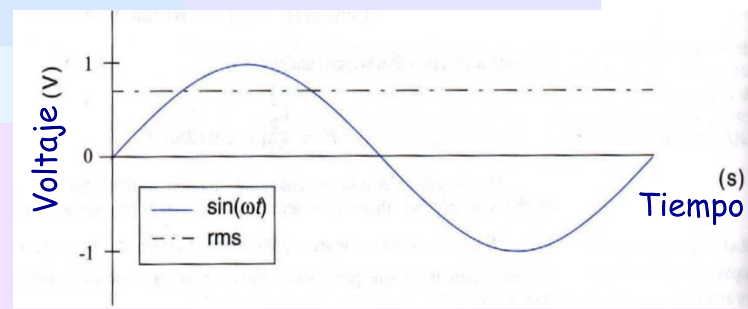
$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Valor efectivo (rms) en función de la potencia

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Relación entre valor efectivo (rms) y forma de onda original





Introducción

Representación sinusoidal y fasorial de corrientes y voltajes

Transformada fasorial F

Dominio del tiempo

$$v = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v' = \sqrt{2}V\sin(\omega(t + t_0) + \varphi)$$

$$F\{\ \}$$

$$F^{-1}\{\ \}$$

Espacio Complejo

$$Ve^{j\varphi}$$

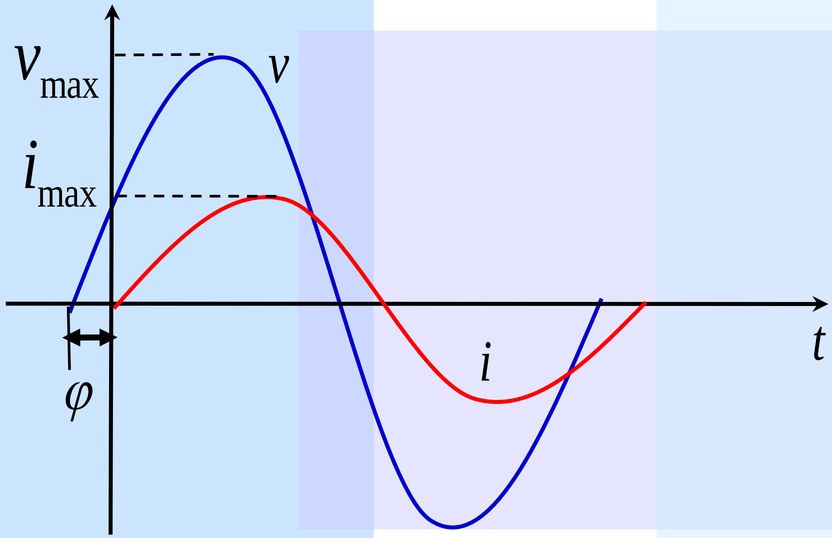
$$Ve^{j(\varphi + \omega t_0)}$$

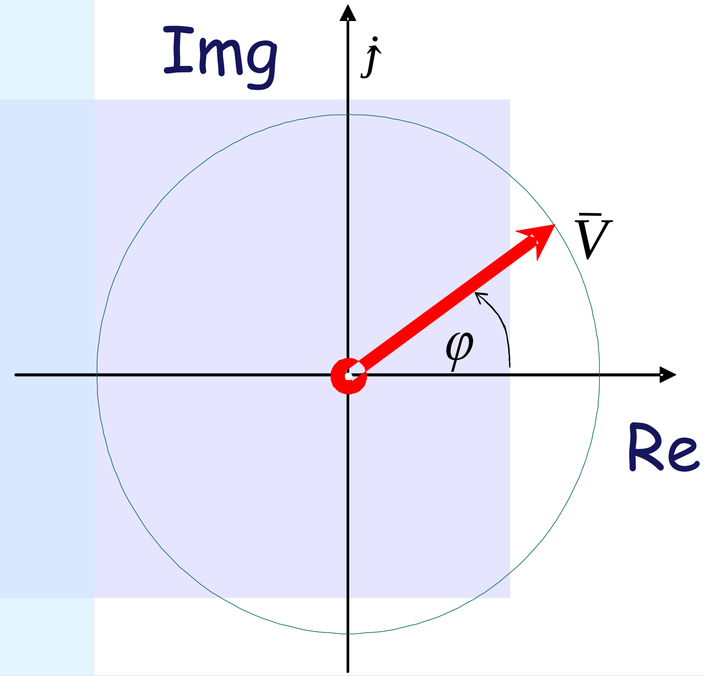
$$F\left\{\sqrt{2}Vsen\left(\omega t + \varphi\right)\right\} = Ve^{j\varphi}$$

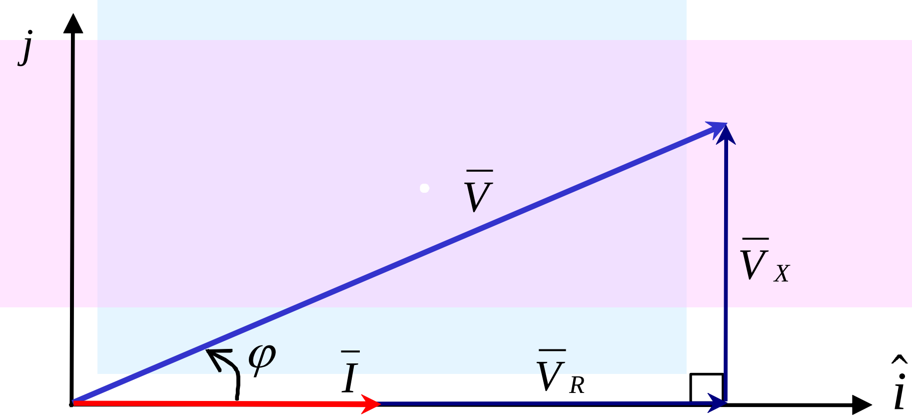
$$F^{-1}\left\{Ve^{j\varphi}\right\} = \sqrt{2}Vsen\left(\omega t + \varphi\right)$$

F tiene la propiedad de ser lineal y biyectiva.

Representación sinusoidal y fasorial de corrientes y voltajes







Representación fasorial a través de Valor Efectivo

$$\overline{V} = Ve^{j\varphi} = V[\cos\varphi + j\sin\varphi]$$

- La suma de dos funciones sinusoidales en el tiempo corresponde con la suma de vectores en el plano complejo.

- Derivadas y/o integrales de funciones del tiempo (capacidades, inductancias) se traducen en el plano complejo en giros de fasores. Ecuaciones diferenciales comunes se transforman en ecuaciones algebraicas.

Diferenciación

$$F\{i(t)\} = F\{I_{\max}\cos(\omega t + \varphi)\} = I_{\max} e^{j\varphi}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d\left(I_{\max}\cos(\omega t + \varphi)\right)}{dt}$$

$$= -\omega I_{\max}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega I_{\max}\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$F\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = F\left\{\omega I_{\max}\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})\right\}$$

$$= \omega I_{\max} e^{j\varphi + j\frac{\pi}{2}} = \omega F\{i(t)\} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega F\{i(t)\}$$

Diferenciación -> fasor gira $\pi/2$ en contra del sentido del reloj y es amplificado en un factor ω

Voltaje en bobina

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

$$\overline{U} = j\omega L\overline{I} = jX_L\overline{I}$$

X_L: reactancia inductiva

Voltaje en capacidad

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$\overline{U} = \frac{1}{j\omega C}\overline{I} = -jX_C\overline{I}$$

X_C: reactancia capacitiva

Representación general de una impedancia

$$\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = Z(\cos\varphi_z + j\sin\varphi_z)$$

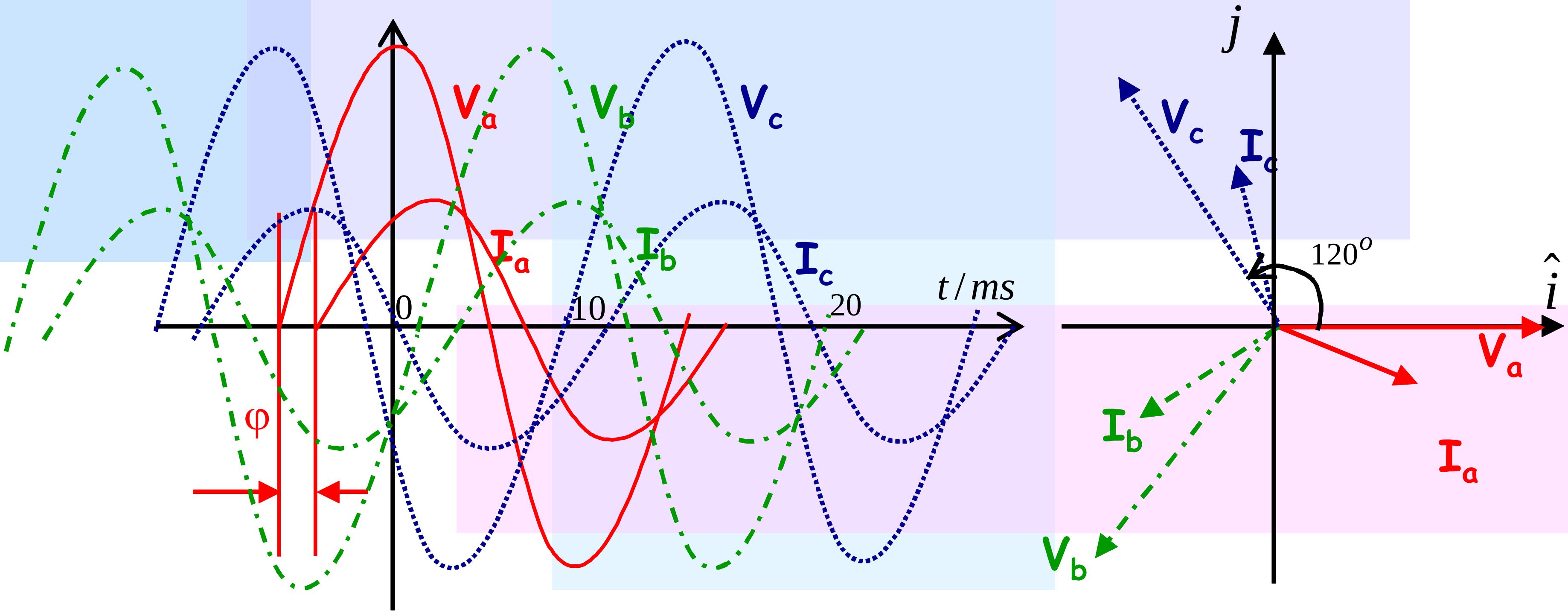
-Definiciones asociadas: R, X, Y, G, B

Sistemas de Corriente Alterna, Términos y Modelos

Representación de sistemas trifásicos

- 3 tensiones de igual magnitud desfasadas en 120º
- Carga simétrica --> tres corrientes de igual magnitud y desfasadas en 120 º

$$v_a(t) = V_{max}\cos(\omega t) \qquad v_b(t) = V_{max}\cos\left(\omega t - 120^o\right)$$



Sistemas de Corriente Alterna, Términos y Modelos

Relaciones válidas en sistemas equilibrados

$$\overline{V}_a + \overline{V}_b + \overline{V}_c = 0$$

- factor de giro

$$\overline{a} = e^{j120^o} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{a}^2 = e^{j240^o} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 + \overline{a} + \overline{a}^2 = 0$$

- relaciones adicionales

$$1 - \overline{a}^2 = \sqrt{3}e^{j30^o} = -j\overline{a}\sqrt{3}$$

$$\overline{a} - 1 = \sqrt{3}e^{j150^o} = -j\overline{a}^2\sqrt{3}$$

$$\overline{a}^2 - \overline{a} = \sqrt{3}e^{j270^o} = -j\sqrt{3}$$

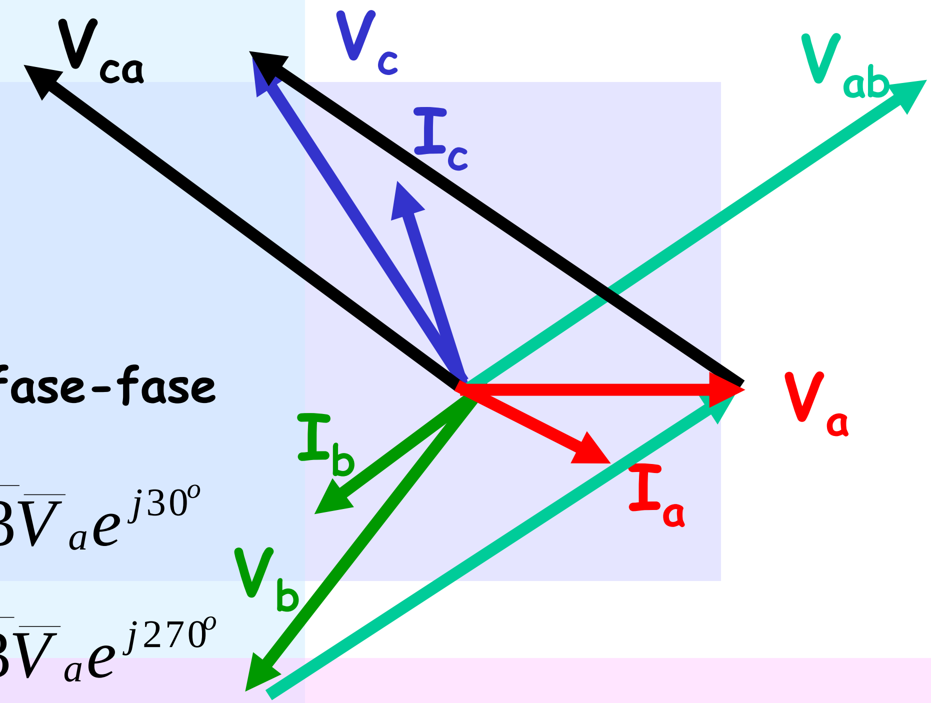
Sistemas de Corriente Alterna, Términos y Modelos

- **Representación matemática de voltajes fase-neutro**

$$\overline{V}_a = \overline{V}_a$$

$$\overline{V}_b = \overline{a}^2 \overline{V}_a$$

$$\overline{V}_c = \overline{a}\,\overline{V}_a$$



- **Relación entre voltajes fase-neutro y fase-fase**

$$\overline{V}_{ab} = \overline{V}_a - \overline{V}_b = \overline{V}_a (1 - \overline{a}^2) = \sqrt{3}\,\overline{V}_a e^{j30^o}$$

$$\overline{V}_{bc} = \overline{V}_b - \overline{V}_c = \overline{V}_a (\overline{a}^2 - \overline{a}) = \sqrt{3}\,\overline{V}_a e^{j270^o}$$

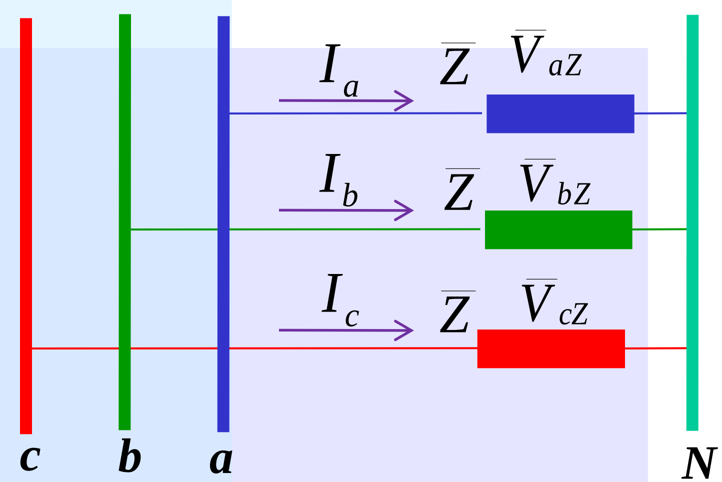
$$\overline{V}_{ca} = \overline{V}_c - \overline{V}_a = \overline{V}_a (\overline{a} - 1) = \sqrt{3}\,\overline{V}_a e^{j150^o}$$

Esta operación puede realizarse en forma análoga para las corrientes respectivas.

Sistemas Equilibrados

Cargas simétricas en conexión estrella

Conexión estrella Y



$$\bar{Z} = Ze^{j\varphi_z} = R + jX$$

Corrientes resultantes

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_{az}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_b = \frac{\bar{V}_{bz}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_{cz}}{\bar{Z}}$$

$$\bar{I}_a = \bar{a}\bar{I}_b = \bar{a}^2 \bar{I}_c$$

Corriente por el neutro

$$\bar{I}_N = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

Si hay desbalance la corriente por el neutro no es cero, razón por la cual es posible eliminar conductor neutro

$$V_\Delta = \sqrt{3} V_Y \qquad I = I_Y$$

Sistemas Equilibrados

Cargas simétricas en conexión delta

$$\bar{Z} = Ze^{j\varphi_z} = R + jX$$

Corrientes resultantes

$$\bar{I}_{ab} = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_{bc} = \frac{\bar{V}_{bc}}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_{ca} = \frac{\bar{V}_{ca}}{\bar{Z}}$$

Para el circuito en Delta se cumple

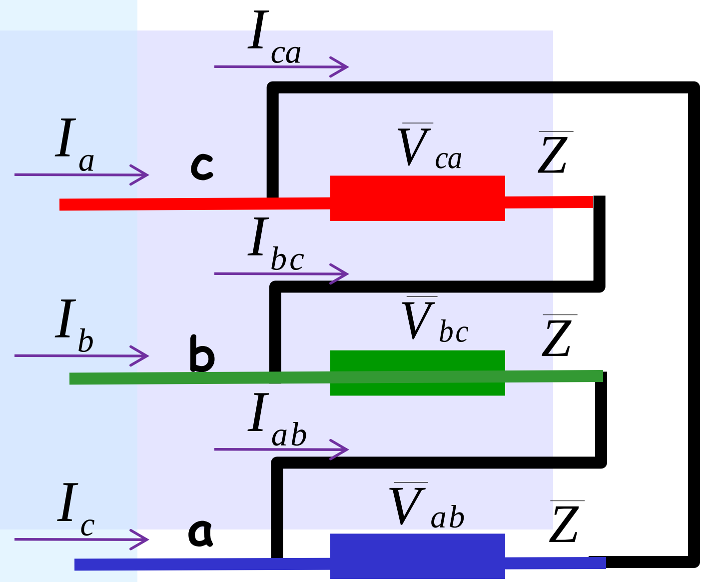
$$\bar{I}_{ab} + \bar{I}_{bc} + \bar{I}_{ca} = \frac{1}{\bar{Z}}\left(\bar{V}_{ab} + \bar{V}_{bc} + \bar{V}_{ca}\right) = 0$$

$$\bar{I}_{a} = -\bar{I}_{ca} + \bar{I}_{ab}$$

$$\bar{I}_{b} = \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab}$$

$$\bar{I}_{c} = \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc}$$

Conexión delta Δ



$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

$$V = V_\Delta \qquad I = \sqrt{3} I_\Delta$$

¿Qué sucede en un cambio de conexión de estrella a delta, para el caso de cargas iguales?

Potencia en Sistemas Alternos

Potencia instantánea

$$v(t) = V_{max} sin(\omega t) \longrightarrow V\angle 0$$

$$i(t) = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi) \longrightarrow I\angle -\varphi$$

$$sin\, x\, sin\, y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

Propiedad trigonométrica

$$p(t) = v(t) i(t) = \frac{\mathrm{V}_{\max} I_{\max}}{2}(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi))$$

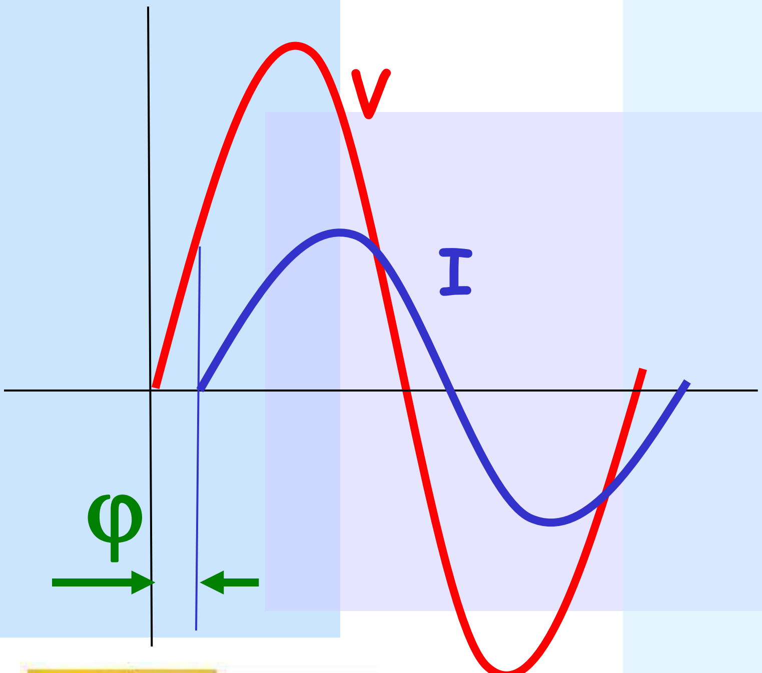
$$= VI\cos(\varphi) - VI\cos(2\omega t - \varphi)$$

Potencia aparente

Potencia instantánea transmitida: forma sinusoidal, doble de la frecuencia de la tensión aplicada, oscila en torno a valor promedio (potencia media, real o activa).

Potencia en Sistemas Alternos

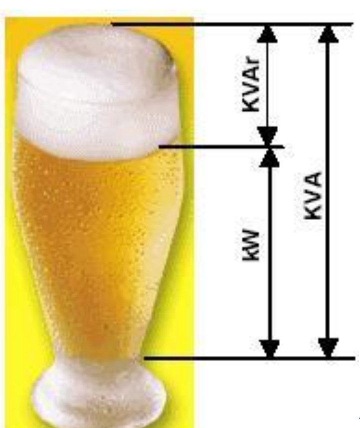
Potencia instantánea en forma gráfica

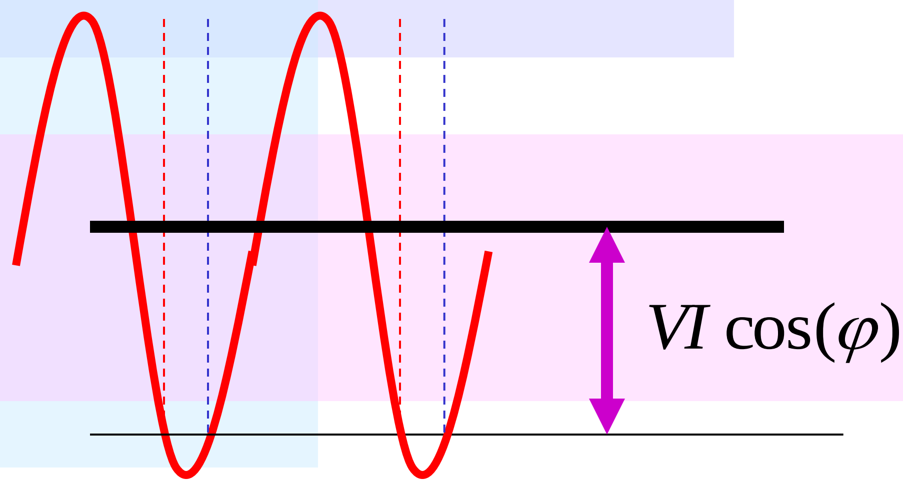


$$p(t) = VI\cos(\varphi) - VI\cos(2\omega t - \varphi)$$
$$= P(1 - \cos(2\omega t)) - Q\sin(2\omega t)$$

$P = VI\cos(\varphi)$ **Potencia activa (MW)**

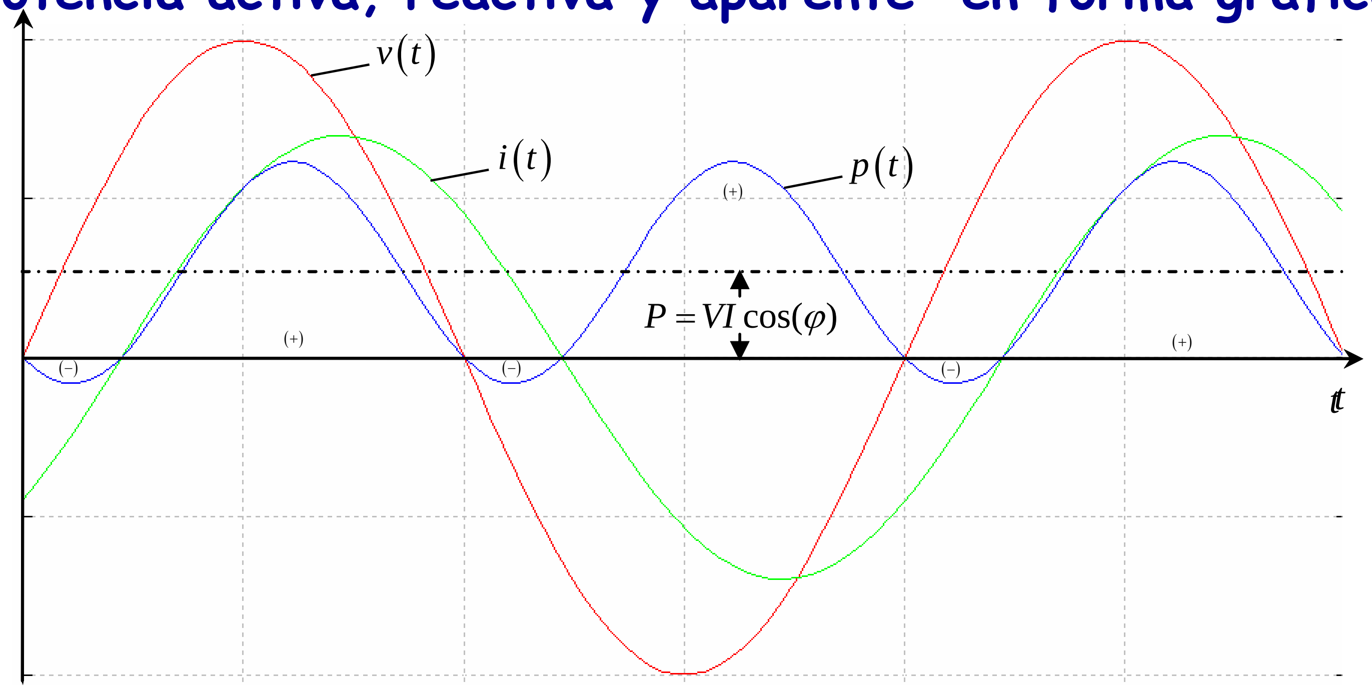
$Q = VI\ \sin(\varphi)$ **Potencia reactiva (MVAr)**

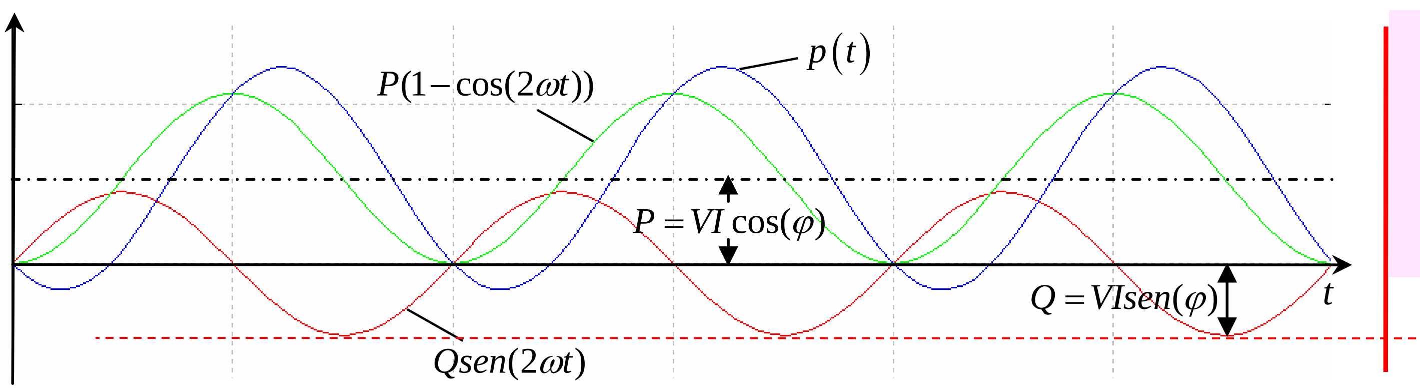




Potencia en Sistemas Alternos

Potencia activa, reactiva y aparente en forma gráfica





Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Potencia en Sistemas Alternos

Potencia fasorial o potencia compleja S

$$\overline{V} = V\angle 0^{o} \qquad \overline{I} = I\angle -\varphi$$

$$\overline{S} = \overline{V}\,\overline{I}^{*} = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi$$

$$= P + jQ = \overline{Z}\,\overline{I}\,\overline{I}^{*} = \overline{Z}\left|\overline{I}\right|^{2}$$

Circuito trifásico

$$p_{3\phi} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c$$

$$= 2VI\left[\sin(\omega t)\sin(\omega t - \varphi) + \sin\left(\omega t - 120^{o}\right)\sin\left(\omega t - 120^{o} - \varphi\right) + \sin\left(\omega t - 240^{o}\right)\sin\left(\omega t - 240^{o} - \varphi\right)\right]$$

$$p_{3\phi} = VI\left[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - 240^{o} - \varphi\right) + \cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - 480^{o} - \varphi\right)\right]$$

$$p_{3\phi} = 3VI\cos\varphi = 3V_{f-n}I\cos\varphi = \sqrt{3}V_{f-f}I\cos\varphi = 3p_{1\phi}$$

La potencia instantánea trifásica es constante y vale 3 veces la potencia media de cada fase. De lo anterior se desprende que no existe una potencia reactiva trifásica (si existe por cada una de las fases --> caso similar al de las corrientes).