



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

ingendesa



EL57A – SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA I



Pablo Medina Cofré

20-04-2010



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Líneas de transmisión

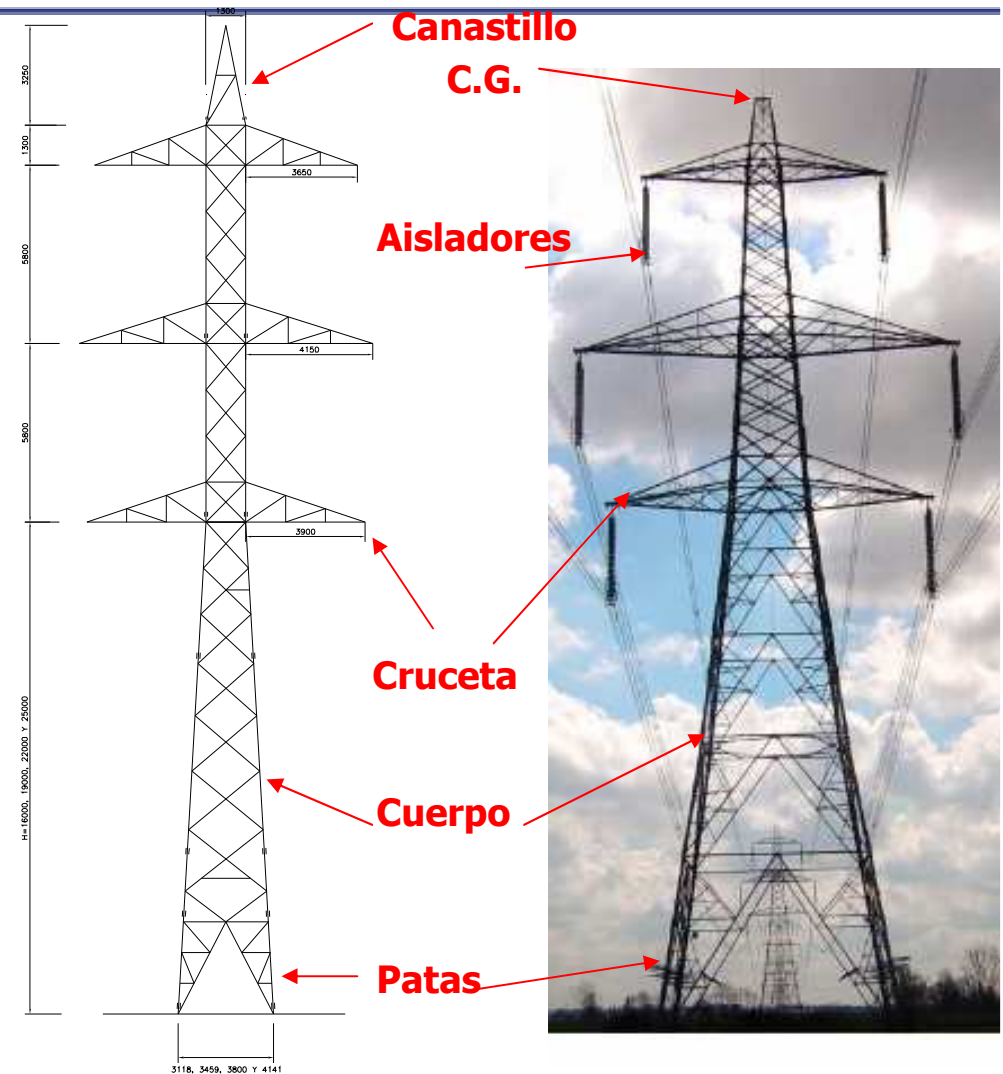
- **Permiten la propagación del campo electromagnético.**
- **En SEP, diremos que permiten la “transmisión de energía”.**
- **Operan en diversas tensiones.**
- **Caso Chileno:**
 - **Hasta 500 kV en transmisión, y mayoritariamente en 220 [kV].**
 - **En distribución se tiene 13.2, 13.8 y 20 [kV] como tensiones representativas.**
 - **En Santiago, existe un “anillo” en 110 kV.**
 - **En el sur, existen líneas en 154 [kV]. No se desarrollan más proyectos de nuevas líneas en dicha tensión.**





Proyecto de líneas

- **Caso alta tensión**
(típicamente ≥ 110 [kv]).
- **Diseño civil.**
 - Especialidad de estructuras.
 - "Cargas" determinadas por especialidad eléctrica.
- **Diseño eléctrico:**
 - Verificación reglamento de corrientes fuertes.
 - Distancias mínimas f-t y f-f.
 - Determinación de aislación y cable de guardia.
 - Determinación de conductores de fase.





Proyecto de líneas.

- **Caso cables aislados.**
(típicamente en media y baja tensión, i.e, $V \leq 25$ [kV].)
- **Diseño civil:**
 - Requerido en caso de banco de ductos en hormigón armado y canaletas.
 - En casos especiales, apoyo geotécnico y geológico.
- **Diseño eléctrico.**
 - Determinación de conductor y estudio de corrientes inducidas.
 - **Diseño del tendido:**
 - Banco de ductos.
 - Canaleta.
 - Directamente enterrados.



Legend to the figure 3.

- 1 – Aluminium or copper conductor.
- 2 – Semi-conductive screen extruded on the phase conductor.
- 3 – XLPE insulation.
- 4 – Semi-conductive screen extruded on insulation.
- 5 – Wrapping of semi-conductive water swelling tape
- 6 – Metallic screen.
- 7 – Wrapping of non conductive water swelling tape
- 8 – Outer sheath: MDPE, LSF



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Nerd-o-meter

- ¿Cuál es la potencia de un rayo?
- Hint: es la potencia necesaria para que funcione el "Capacitor de flujo".

a) 1,11 GW

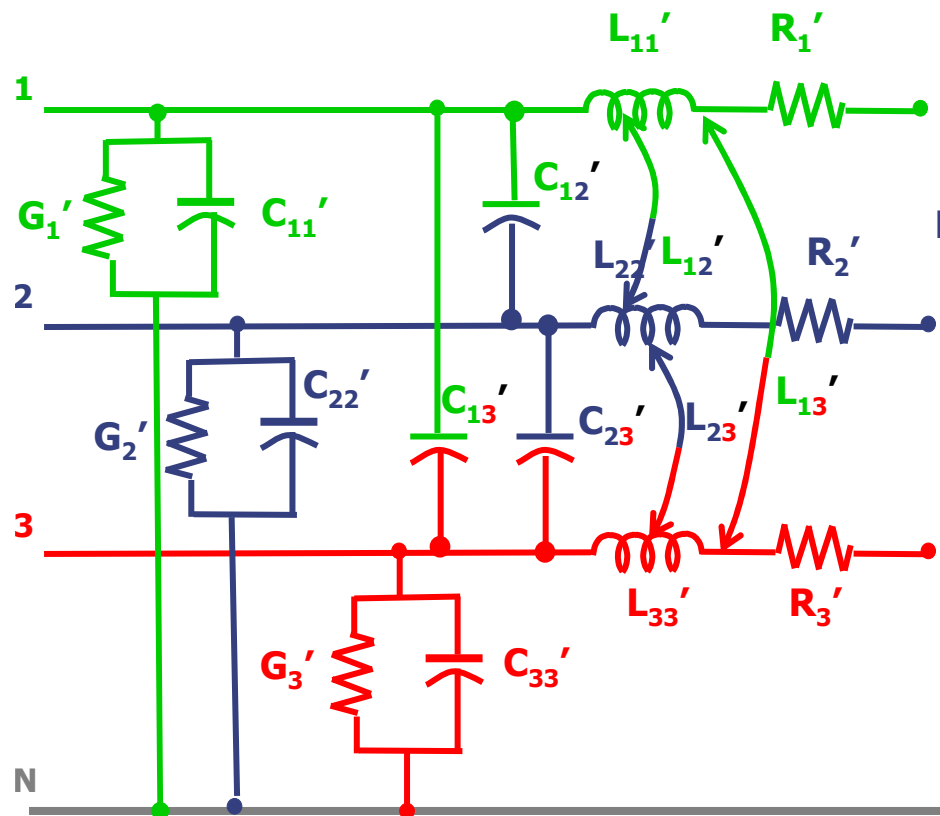
b) 1,21 GW

c) 1,31 GW



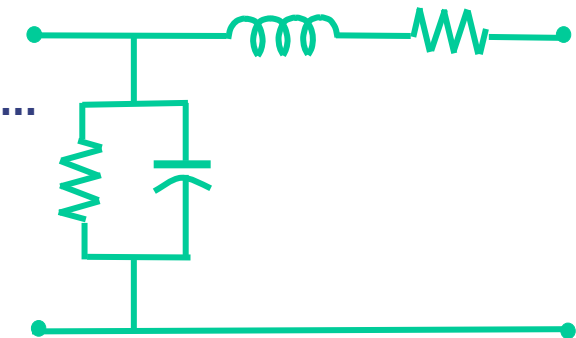
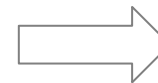


Electromagnéticamente hablando...



Modelo equivalente por unidad de longitud.

Nos gustaría llegar a ...

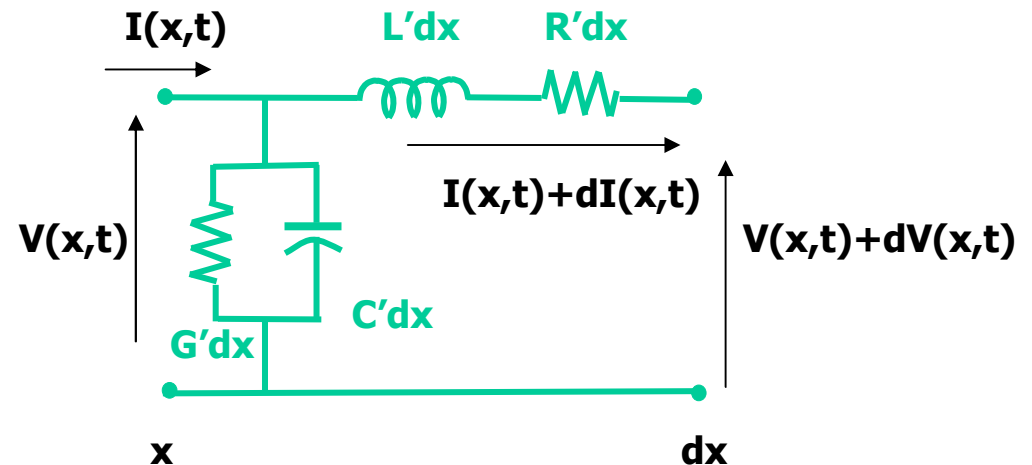


Modelo equivalente monofásico por unidad de longitud.



Modelo de línea de transmisión

- Supongamos que conocemos los parámetros y que tenemos un equivalente monofásico.
- La línea se modela a través de ecuaciones diferenciales y parámetros distribuidos.
- Ecs. Diferenciales se obtienen a partir de las leyes de voltaje y corriente aplicadas a la figura.



$$\underbrace{\begin{aligned} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + R' I(x,t) + L' \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} + G' V(x,t) + C' \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}}_{\text{Ecuación del telégrafo}} \xrightarrow{F\{}} \begin{aligned} \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \underbrace{(R' + j\omega L')}_{\dot{Z}'} \dot{I} &= 0 \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} + \underbrace{(G' + j\omega C')}_{\dot{Y}'} \dot{V} &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación del telégrafo



Modelo de línea de transmisión

- Tomando derivada respecto de x en las ecuaciones anteriores, y combinando ambas expresiones, se llega a que los fasores voltaje y corriente deben resolver una ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \dot{V}(x)}{\partial x^2} - \dot{Z}\dot{Y} \cdot \dot{V}(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \dot{I}(x)}{\partial x^2} - \dot{Z}\dot{Y} \cdot \dot{I}(x) = 0$$

$$\dot{Z}\dot{Y} = \gamma^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Constante de atenuación Constante de fase

$$\dot{V}(x) = \dot{V}^+(x) + \dot{V}^-(x) = a \cdot e^{-\gamma x} + b \cdot e^{\gamma x}$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}^+(x) + \dot{I}^-(x) = \frac{1}{Z_c} a \cdot e^{-\gamma x} + -\frac{1}{Z_c} b \cdot e^{\gamma x}$$

$$\dot{Z}_c = \frac{\dot{V}^+(x)}{\dot{I}^+(x)} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \text{ [Ohm]}$$

$$\frac{1}{\dot{Z}_c} = \dot{Y}_c$$

a y b se determinan a partir de C.B.



Parámetros ABCD

- Las ecuaciones para $V(x)$ e $I(x)$ se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}(x) \\ \dot{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_c & -Y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\gamma x} & 0 \\ 0 & e^{\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

- En particular:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}(0) \\ \dot{I}(0) \end{bmatrix}}_{V_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_c & -Y_c \end{bmatrix}}_Y \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_b, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}(\ell) \\ \dot{I}(\ell) \end{bmatrix}}_{V_\ell} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_c & -Y_c \end{bmatrix}}_Y \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\gamma \ell} & 0 \\ 0 & e^{\gamma \ell} \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_b$$

ℓ s el largo de la línea

$$V_0 = Yb \Rightarrow b = Y^{-1}V_0$$

$$V_\ell = YEY^{-1}V_0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}(\ell) \\ \dot{I}(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma \ell & -\dot{Z}_c \sinh \gamma \ell \\ -\dot{Y}_c \sinh \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}(0) \\ \dot{I}(0) \end{bmatrix}$$

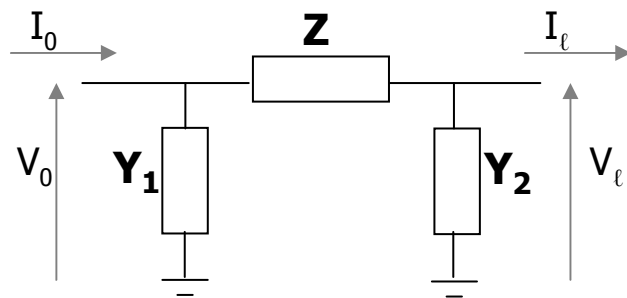
$$\begin{bmatrix} \dot{V}(0) \\ \dot{I}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma \ell & \dot{Z}_c \sinh \gamma \ell \\ \dot{Y}_c \sinh \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}(\ell) \\ \dot{I}(\ell) \end{bmatrix}$$

Parámetros
ABCD



Relación matriz ABCD y modelo pi

- El caso general de un modelo pi:



$$A = 1 + Y_2 Z$$

$$B = Z$$

$$C = Y_1 + Y_2 + Z Y_1 Y_2$$

$$D = 1 + Y_1 Z$$

- En el caso de la línea con la línea $A=D$, luego $Y_1=Y_2=Y/2$:

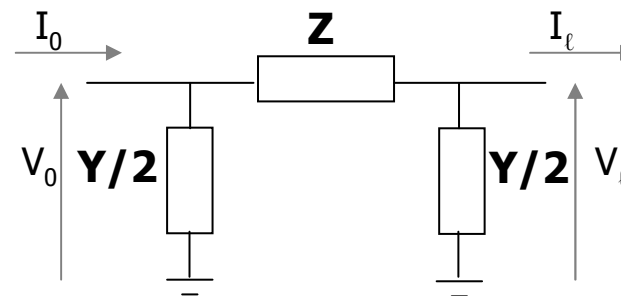
$$\frac{Y}{2} = \frac{1}{Z_c} \frac{\cosh \gamma \ell - 1}{\sinh \gamma \ell} = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma \ell}{2}$$

$$A = 1 + ZY/2$$

$$B = Z$$

$$C = Y(1 + ZY/4)$$

$$D = A$$





Aproximación de “línea corta”

- En este caso, las funciones hiperbólicas se aproximan al valor de su argumento:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_c \sinh \gamma \ell \approx \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \cdot \sqrt{Z'Y'} \ell = Z' \ell = (R' + j\omega L') \ell$$

$$\frac{\dot{Y}}{2} = \frac{1}{\dot{Z}_c} \tanh \frac{\gamma \ell}{2} \approx \sqrt{\frac{Y'}{Z'}} \cdot \frac{\sqrt{Z'Y'}}{2} = \frac{Y'}{2} = (G' + j\omega C') \ell$$

- En el caso de líneas aéreas, la aproximación es válida para largos menores a 250 km.
- En el caso de líneas de cables aislados, la aproximación es válida para largos menores a 30 km.

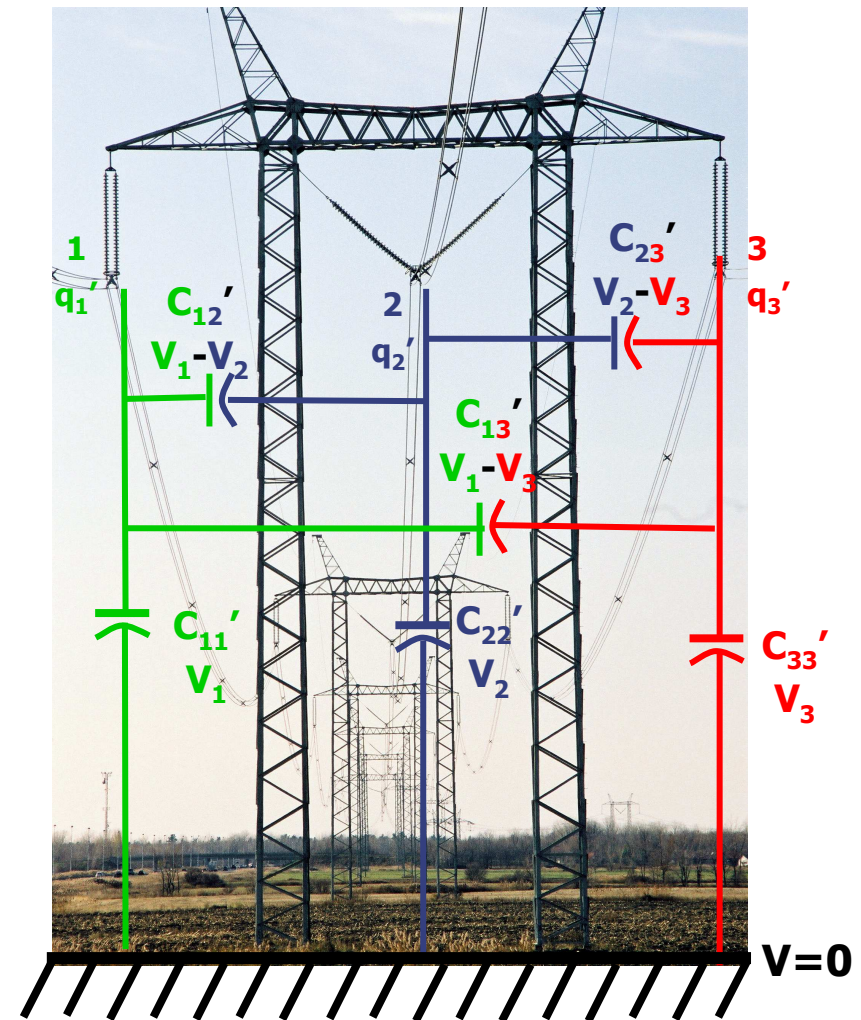
Capacitancia

- Cada conductor de una línea de Tx se modela como una línea de carga [C/un. long.].
- Entre conductores y tierra existe una diferencia de potencial.

$$\dot{q}_1' = C_{11}' \dot{V}_1 + C_{12}' (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + C_{13}' (\dot{V}_1 - \dot{V}_3)$$

$$\dot{q}_1' = (C_{11}' + C_{12}' + C_{13}') \dot{V}_1 - C_{12}' \dot{V}_2 - C_{13}' \dot{V}_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1' \\ \dot{q}_2' \\ \vdots \\ \dot{q}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n C_{1k}' & -C_{12}' & \cdots & -C_{1n}' \\ -C_{21}' & \sum_{k=1}^n C_{2k}' & \cdots & -C_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{n1}' & -C_{n2}' & \cdots & \sum_{k=1}^n C_{nk}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{bmatrix}$$



$$[\dot{q}'] = [C'] [\dot{V}]$$



Capacitancia

- Los elementos de C dependen de todo el conjunto de conductores, lo cual puede ser poco práctico.
- Analíticamente, lo que se calcula es la inversa de la matriz de capacitancia. Los elementos de esta matriz se llaman “coeficientes de potencial”

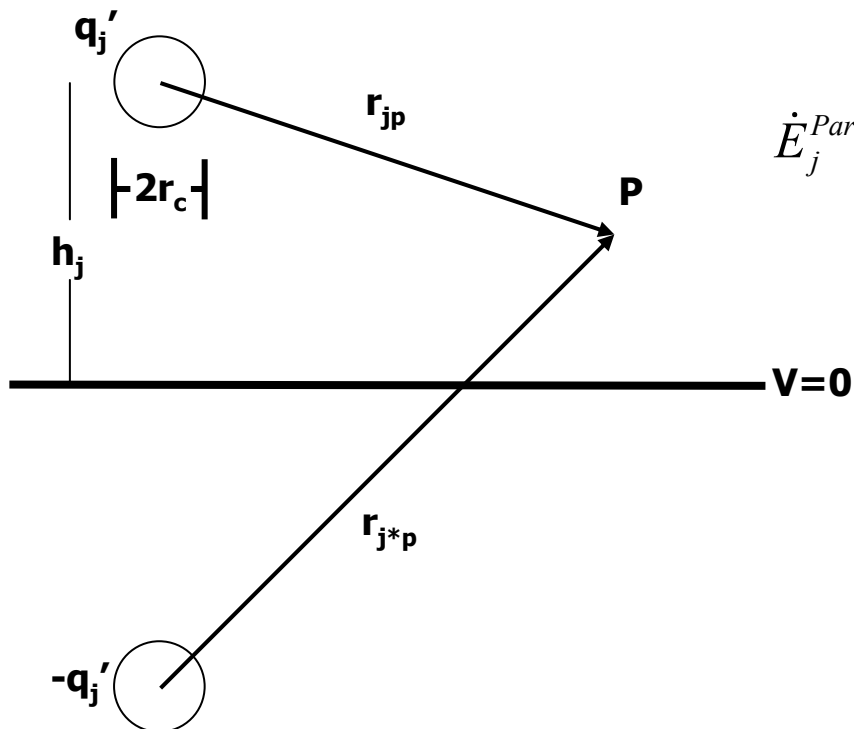
$$[\dot{V}] = [K'] [\dot{q}']$$

- Para el cálculo de los coeficientes de potencial se utiliza el método de las imágenes, considerando que:
 - Suelo es conductor perfecto.
 - El campo de cada conductor es radial, i.e., el resto de los conductores no altera la uniformidad de la carga en los conductores.
- Se calcula el campo eléctrico en el espacio, generado por un conductor y su imagen. El campo en el espacio generado por toda la línea, es la suma de las contribuciones de cada par “conductor-imagen”.



Capacitancia

- Campo producido por el par j -ésimo en el punto P .

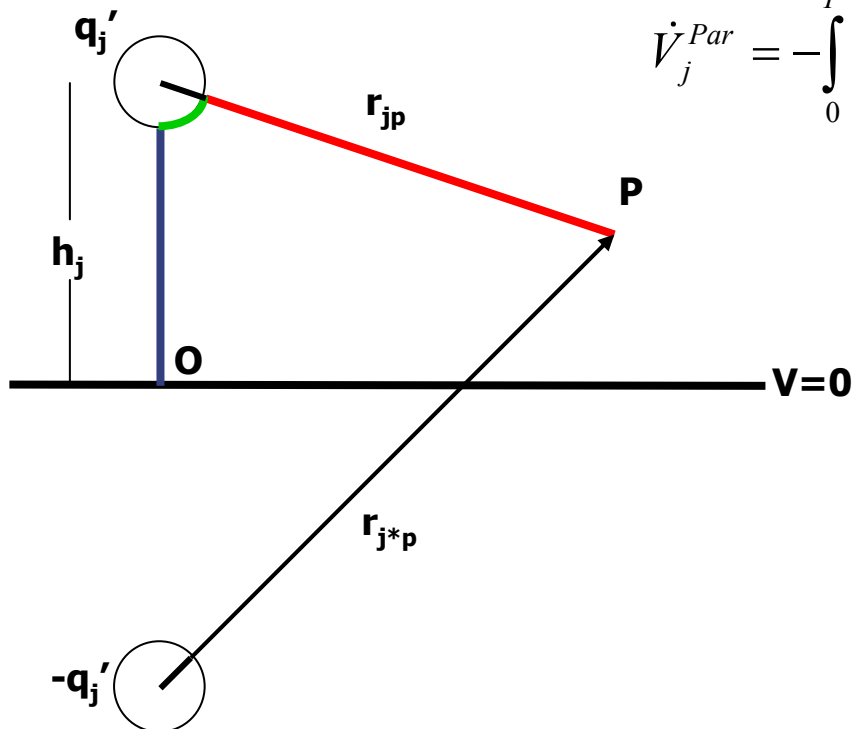


$$\dot{E}_j^{Par} = \dot{E}_j + \dot{E}_{j^*} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\dot{q}_j'}{r_{jp}} \hat{r}_{jp} - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\dot{q}_j'}{r_{j^*p}} \hat{r}_{j^*p}$$



Capacitancia

- El potencial generado por el par j-ésimo:



$$\dot{V}_j^{Par} = - \int_0^P \dot{E}_j^{Par} \cdot d\vec{r} = - \int_0^P \dot{E}_j \cdot d\vec{r} - \int_0^P \dot{E}_{j*} \cdot d\vec{r}$$

$$- \int_0^P \dot{E}_j \cdot d\vec{r} = - \int \dot{E}_j \cdot d\vec{r} - \underbrace{\int \dot{E}_j \cdot d\vec{r}}_{\dot{E}_j \perp d\vec{r}} - \int \dot{E}_j \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_j}{r_c} - \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{jp}}{r_c}$$

$$= \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_j}{r_{jp}}$$

Se puede demostrar que: $\dot{V}_j^{Par} = \frac{\dot{q}_j'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{j*p}}{r_{jp}}$



Capacitancia

- El potencial del conductor k-ésimo respecto del suelo, debido a todas las cargas es:

$$\dot{V}_k = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j ' \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{j^*k}}{r_{jk}} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j ' K_{kj} '$$

- r_{jk} y r_{j^*k} corresponden a la distancia entre los centros del conductor k y el conductor j y su imagen.
- Si $j=k$, $r_{jk}=r_c$ y $r_{j^*k}=2h_j$.
- En estas expresiones, se desprecia el radio de los conductores frente a las distancias entre conductores y sus respectivas imágenes.



Capacitancia

- **Analicemos la fase 1 de una línea de simple circuito:**

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{2h_1}{r_c}\right) \dot{q}_1 + \ln\left(\frac{r_{2*1}}{r_{21}}\right) \dot{q}_2 + \ln\left(\frac{r_{3*1}}{r_{31}}\right) \dot{q}_3 \right]$$

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(2h_1) \dot{q}_1 + \ln(r_{2*1}) \dot{q}_2 + \ln(r_{3*1}) \dot{q}_3 - (\ln(r_c) \dot{q}_1 + \ln(r_{21}) \dot{q}_2 + \ln(r_{31}) \dot{q}_3) \right]$$

- **Si los conductores son los vértices de un triángulo equilátero de lado D y además se considera un sistema trifásico balanceado: $\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = 0$**

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln(2h_1) \dot{q}_1 + \ln(r_{2*1}) \dot{q}_2 + \ln(r_{3*1}) \dot{q}_3 + \ln\left(\frac{D}{r_c}\right) \dot{q}_1 \right]$$

- **Si también consideramos que los conductores están muy alejados del suelo, es decir: $r_{2*1} \approx r_{3*1} \approx 2h_1$**

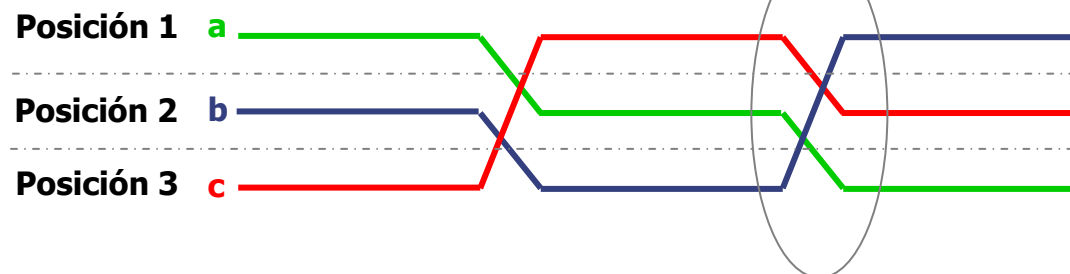
$$\dot{V}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D}{r_c}\right) \dot{q}_1 \Rightarrow C_1' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{r_c}\right)}$$

...Y por simetría se tiene lo mismo para las otras fases



Transposición de fases

- ¡La vida es triste Venancio!... existen pocas líneas en configuración triangular.
- Cada fase se tiene una capacitancia diferente, por lo que la línea introduce un desbalance en el sistema.
- Adicionalmente, el sistema no tendrá un equivalente monofásico.
- Solución: realizar una transposición de la línea.



[Ver video](#)



Transposición de fases

- Para caracterizar a una fase, se toma un promedio de la tensión por unidad de longitud:

$$\dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{\dot{V}_1^{Tramo1} + \dot{V}_1^{Tramo2} + \dot{V}_1^{Tramo3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} & \left[\frac{(\ln(2h_1) + \ln(2h_2) + \ln(2h_3))}{3} \dot{q}_1 + \frac{(\ln(r_{2*1}) + \ln(r_{3*2}) + \ln(r_{3*1}))}{3} \dot{q}_2 \right. \\ & + \frac{(\ln(r_{3*1}) + \ln(r_{2*1}) + \ln(r_{3*2}))}{3} \dot{q}_3 - \ln(r_c) \dot{q}_1 - \frac{(\ln(r_{21}) + \ln(r_{32}) + \ln(r_{31}))}{3} \dot{q}_2 \\ & \left. + \frac{(\ln(r_{3*1}) + \ln(r_{2*1}) + \ln(r_{3*2}))}{3} \right] \end{aligned}$$

Considerando: $-\dot{q}_1 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3$

$$\dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{DMG}{r_c}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt[3]{r_{2*1}r_{3*2}r_{3*1}}}{2\sqrt[3]{h_1h_2h_3}}\right) \right] \dot{q}_1$$

$DMG = \sqrt[3]{r_{21}r_{32}r_{31}}$



Transposición de fases

- El último logaritmo natural da cuenta de la existencia de un plano de tierra.
- Si se considera que los conductores están alejados del suelo, se tiene que:

$$r_{2*1} \approx r_{3*1} \approx r_{3*2} \approx 2h_1 \approx 2h_2 \approx 2h_3$$

- Finalmente:

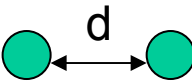
$$\dot{V}_1^{Transpuesto} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{DMG}{r_c}\right) \dot{q}_1 \Rightarrow C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{DMG}{r_c}\right)}$$

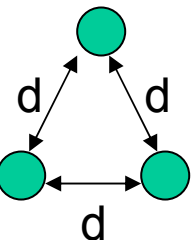
¡ Y lo anterior se tiene para todas las fases!

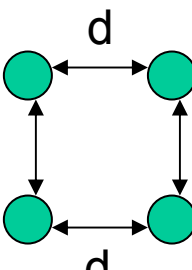


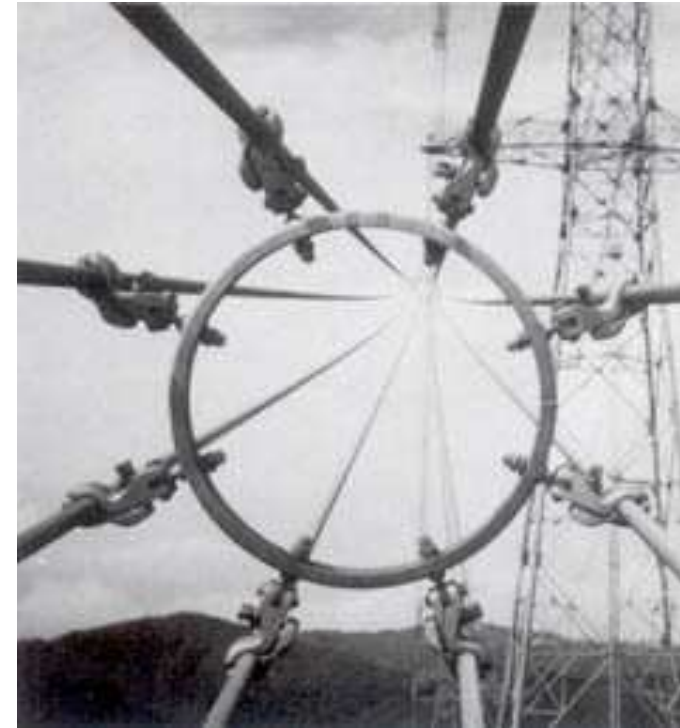
Múltiples conductores por fase

- Conocido también como:
 - Conductores fasciculados.
 - Bundled conductors.
- Razones para su uso:
 - Minimización de “efecto corona”, especialmente sobre 500 kV.
 - Límite térmico de conductores.
- Para efectos de cálculo, se trata como un único conductor con un “radio equivalente”.


$$r_{eq} = \sqrt{r_c \cdot d}$$


$$r_{eq} = \sqrt[3]{r_c \cdot d^2}$$

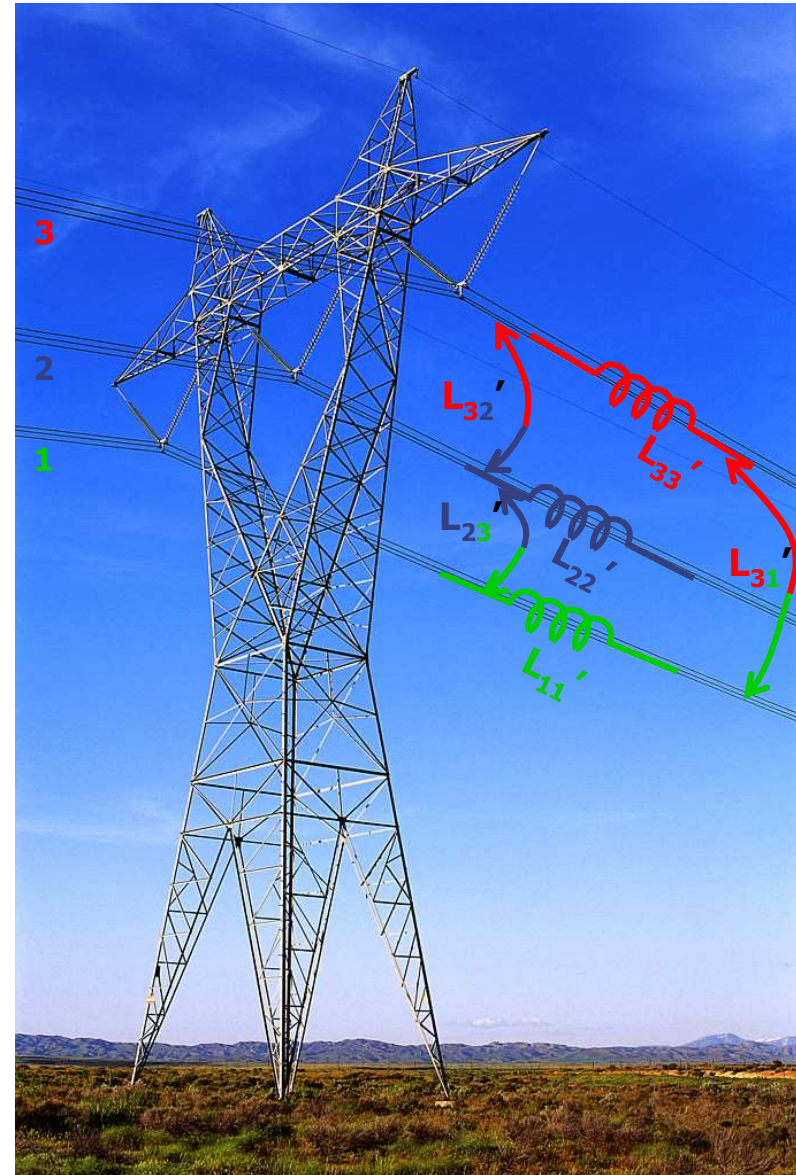

$$r_{eq} = 1,09\sqrt[4]{r_c \cdot d^3}$$





Inductancia

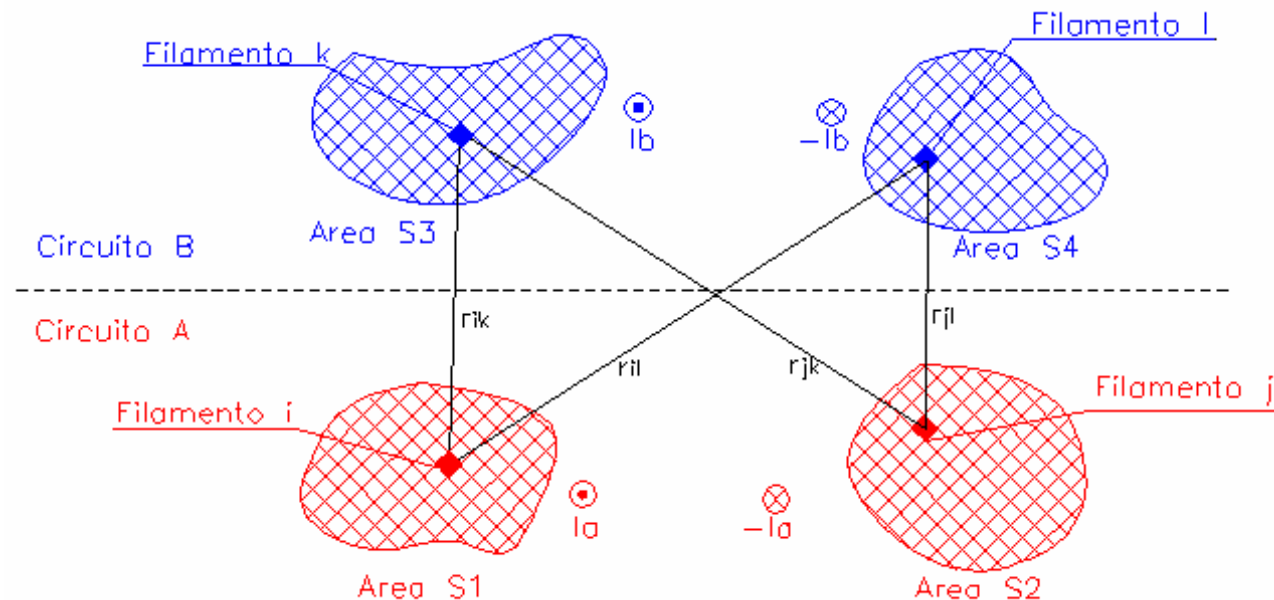
- Se debe calcular la caída de tensión en cada fase:
 - Debido a circulación de la corriente de la propia fase.
 - Debido a circulación de la corriente de las demás fases.
- La constante de proporcionalidad que relaciona corriente con caída de tensión se llama “Inductancia”.
 - Inductancia propia.
 - Inductancia mutua.





Inductancia mutua.

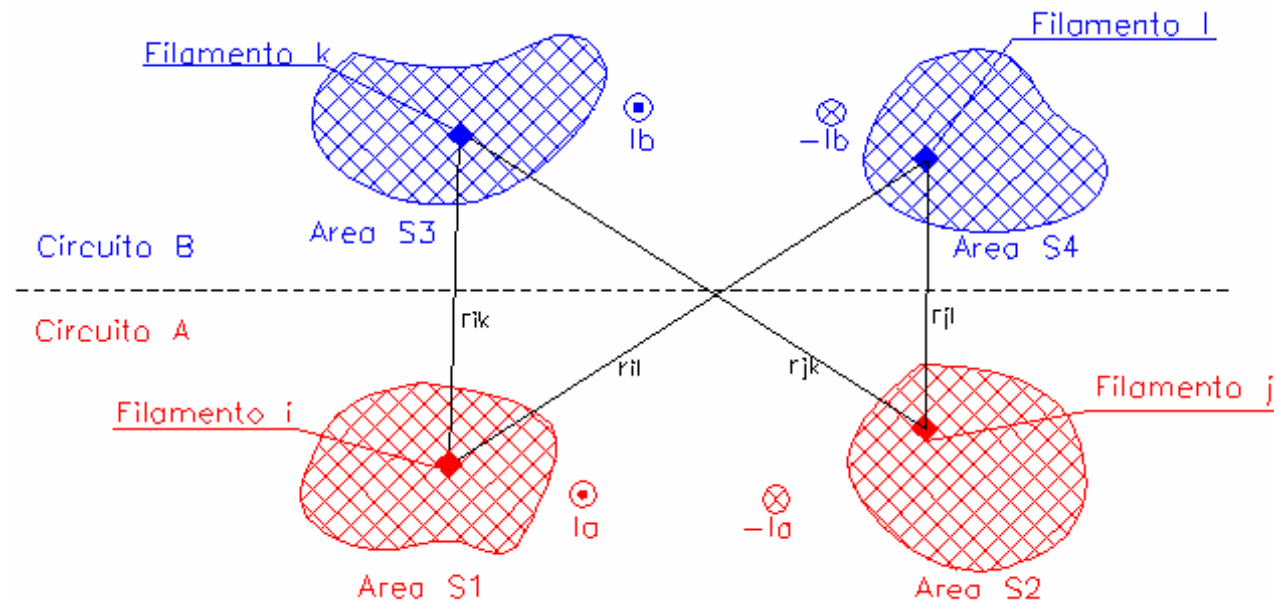
- Se analiza el caso general para calcular la inductancia mutua entre dos circuitos.
- Por el circuito B circula una corriente I_b :
 - “Viene” por el conductor 3.
 - “Retorna” por el conductor 4.
- Por el circuito A circula una corriente I_a :
 - “Viene” por el conductor 1.
 - “Retorna” por el conductor 2.





Inductancia mutua.

- Se desprecia efecto pelicular, por lo que la corriente se distribuye uniformemente en la sección de cada conductor.
- Los conductores se dividen en "filamentos" de área "muy pequeña", por lo que la corriente que circula por ellos es $\Delta I = J \Delta s$.
- Densidad de corriente uniforme, implica que $J = I/S$, para cada conductor. Luego, $\Delta I = I \Delta S/S$.
- El "circuito cerrado" formado por los filamentos k y l del Circuito B, enlaza una porción del campo magnético producido por los filamentos i y j del Circuito A.





Inductancia mutua

- Los flujos enlazados son:

$$\Delta\Phi_{kl,i} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_a \Delta S_1}{S_1} \int_{r_{ik}}^{r_{il}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_a \Delta S_1}{S_1} [\ln(r_{il}) - \ln(r_{ik})]$$

$$\Delta\Phi_{kl,j} = -\frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_a \Delta S_1}{S_2} \int_{r_{jk}}^{r_{jl}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_a \Delta S_1}{S_2} [\ln(r_{jl}) - \ln(r_{jk})]$$

- El flujo total enlazado por los filamentos l y k es la suma de todos los flujos producidos por el circuito a:

$$(\Phi_{kl})_a = \sum_{i=1}^n \Delta\Phi_{kl,i} + \sum_{j=1}^n \Delta\Phi_{kl,j}$$

$$(\Phi_{kl})_a = \frac{\mu_o I_a}{2\pi} \left[\frac{1}{S_1} \sum_{i=1}^n \ln(r_{il}) \Delta S_1 - \frac{1}{S_1} \sum_{i=1}^n \ln(r_{ik}) \Delta S_1 + \frac{1}{S_2} \sum_{j=1}^n \ln(r_{jk}) \Delta S_2 - \frac{1}{S_2} \sum_{j=1}^n \ln(r_{jl}) \Delta S_2 \right]$$

- Haciendo tender n a infinito, los delta de superficie tenderán a cero, y por lo tanto:

$$(\Phi_{kl})_a = \frac{\mu_o}{2\pi} I_a \left[\frac{1}{S_1} \int_{S_1} \ln(r_{il}) dS_1 - \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \ln(r_{ik}) dS_1 - \frac{1}{S_2} \int_{S_2} \ln(r_{jl}) dS_2 + \frac{1}{S_2} \int_{S_2} \ln(r_{jk}) dS_2 \right]$$



Inductancia mutua

- Estamos en la búsqueda de una constante de proporcionalidad que indique cual es el flujo que enlaza el circuito b, generado por el circuito a.
- Problema: dependiendo de cómo se escojan los pares (k,l), se tendrán distintas expresiones para el flujo enlazado.
- Solución: tomar un promedio sobre los n^2 pares (k,l).

$$\begin{aligned}
 (\bar{\Phi}_{kl})_a &= \frac{1}{n^2} \frac{\mu_o I_a}{2\pi} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{S_1} \int_{S_1} \ln(r_{il}) dS_1 - \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \ln(r_{ik}) dS_1 - \frac{1}{S_2} \int_{S_2} \ln(r_{jl}) dS_2 + \frac{1}{S_2} \int_{S_2} \ln(r_{jk}) dS_2 \right] \\
 &= \frac{\mu_o I_a}{2\pi} \left[\sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{S_1} \int_{S_1} \ln(r_{il}) dS_1 \right) \frac{1}{n} - \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{S_2} \int_{S_2} \ln(r_{jl}) dS_2 \right) \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{S_2} \int_{S_2} \ln(r_{jk}) dS_2 \right) \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{S_1} \int_{S_1} \ln(r_{ik}) dS_1 \right) \frac{1}{n} \right]
 \end{aligned}$$

- Nuevamente haciendo n tender a infinito, y aplicando la definición de inductancia:

$$L_{ab} = \frac{(\bar{\Phi}_{kl})_a}{I_a} = \frac{\mu_o}{2\pi} \left[\int_{S_4} \int_{S_1} \frac{\ln(r_{il})}{S_1 S_4} dS_1 dS_4 - \int_{S_4} \int_{S_2} \frac{\ln(r_{jl})}{S_2 S_4} dS_2 dS_4 + \int_{S_3} \int_{S_2} \frac{\ln(r_{jk})}{S_2 S_3} dS_2 dS_3 - \int_{S_3} \int_{S_1} \frac{\ln(r_{ik})}{S_1 S_3} dS_1 dS_3 \right]$$



Inductancia mutua

- Se define el concepto de “distancia media geométrica” entre un área i y un área j como:

$$\ln g_{ij} = \frac{1}{S_i S_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \ln(r_{ij}) dS_i dS_j \quad \Rightarrow \quad L_{ab} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{g_{14} g_{23}}{g_{24} g_{13}} \right)$$

- Si los circuitos a y b comparten su retorno, i.e, los conductores 2 y 4 se superponen formando un conductor n :

$$L_{ab} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{g_{1n} g_{3n}}{g_{nn} g_{13}} \right) \quad \Rightarrow \quad L_{12} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{g_{1n} g_{2n}}{g_{nn} g_{12}} \right)$$

- Si los radios de los conductores son iguales y son mucho menores a la distancia de separación:

$$\ln g_{12} = \frac{1}{SS} \int_S \int_S \ln(r_{12}) dS_1 dS_2 \approx \frac{1}{SS} \int_S \int_S \ln(D_{12}) dS_1 dS_2 = \ln(D_{12}) \Rightarrow g_{12} \approx D_{12}$$



Inductancia propia

- La inductancia propia da cuenta del flujo enlazado y producido por el mismo circuito.
- Por lo tanto, se puede suponer que el circuito a se superpone al circuito, y luego aplicar la definición de inductancia mutua.

$$L_{11} = \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \left(\frac{g_{1n}^2}{g_{nn} g_{11}} \right)$$

- El radio medio geométrico g_{aa} para un círculo de radio r_c es:

$$g_{11} = e^{-\frac{1}{4}} r_c$$

- Esta expresión se obtiene al aplicar la definición:

$$\ln g_{11} = \frac{1}{S_1 S_1} \int_{S_1} \int_{S_1} \ln(r_{ij}) dS_i dS_j$$



Inductancia

- La caída de tensión en la fase a de un simple circuito es:

$$v_1 = \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dt} \Phi_{1k} = \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dt} (L_{1k} I_k) \Rightarrow \dot{V}_1 = j\omega \sum_{k=1}^3 L_{1k} \dot{I}_k$$

$$\dot{V}_1 = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{g_{1n}^2}{g_{nn} g_{11}} \right) \dot{I}_1 + \ln \left(\frac{g_{1n} g_{2n}}{g_{nn} g_{12}} \right) \dot{I}_2 + \ln \left(\frac{g_{1n} g_{3n}}{g_{nn} g_{13}} \right) \dot{I}_3 \right]$$

$$\dot{V}_1 = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{g_{1n}}{g_{nn}} \right) \sum_{k=1}^3 \dot{I}_k + \sum_{k=1}^3 \ln(g_{kn}) \dot{I}_k + \sum_{k=1}^3 \ln \left(\frac{1}{g_{1k}} \right) \dot{I}_k \right]$$

- Si el sistema es balanceado y el retorno común está muy lejos:

$$\sum_{k=1}^3 \dot{I}_k = 0, \quad g_{1n} \approx g_{2n} \approx g_{3n} \approx g_{fn} \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \ln(g_{kn}) \dot{I}_k \approx \ln(g_{fn}) \sum_{k=1}^3 \dot{I}_k = 0$$

$$\dot{V}_1 = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{e^{-1/4} r_c} \right) \dot{I}_1 + \ln \left(\frac{1}{D_{12}} \right) \dot{I}_2 + \ln \left(\frac{1}{D_{13}} \right) \dot{I}_3 \right]$$



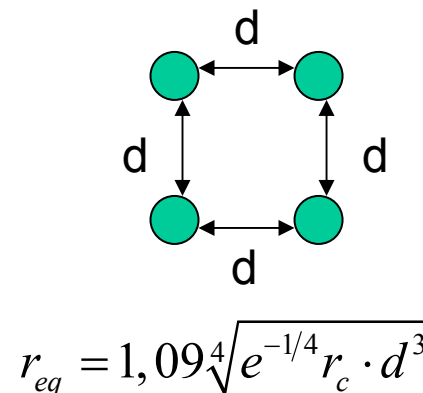
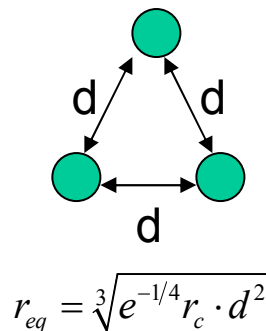
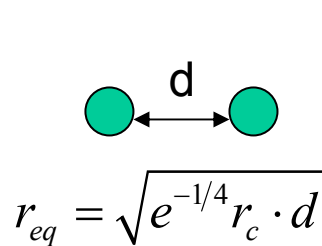
Inductancia

- De la misma forma que se hizo para la capacitancia, se tendrá que para una línea triangular o con transposición:

$$\dot{V}_1 = j\omega \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{DMG}{e^{-1/4} r_c}\right)}_{L_1'} \dot{I}_1 \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} [H/m] \quad \Rightarrow \quad L_1' = 2 \cdot 10^{-7} \ln\left(\frac{DMG}{r_{eq}}\right) \left[\frac{H}{m}\right]$$

¡ Y lo anterior se tiene para todas las fases!

- Y en el caso de tener conductores fasciculados:





Carta de operación de una línea de transmisión

- Conocido también como diagrama de círculo.
- Idea: Dadas las tensiones en los extremos transmisor y receptor, establecer el lugar geométrico de la potencia compleja en el extremo receptor:

$$\dot{V}_t = \dot{A}\dot{V}_r + \dot{B}\dot{I}_r \Rightarrow \dot{I}_r^* = \frac{\dot{V}_t^* - \dot{A}^*\dot{V}_r^*}{\dot{B}^*} \quad \dot{S}_r = \dot{V}_r\dot{I}_r^* = \frac{\dot{V}_r\dot{V}_t^*}{\dot{B}^*} - \frac{\dot{A}^*|\dot{V}_r|^2}{\dot{B}^*}$$

- Si se considera que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= V_r \angle 0^\circ & \dot{A} &= A \angle \alpha \\ \dot{V}_t &= V_t \angle \delta & \dot{B} &= B \angle \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{V_r V_t}{B} \cos(\beta - \delta) - \frac{V_r^2 A}{B} \cos(\beta - \alpha) \\ Q_r &= \frac{V_r V_t}{B} \sin(\beta - \delta) - \frac{V_r^2 A}{B} \sin(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

$$\left(P_r + \frac{V_r^2 A}{B} \cos(\beta - \alpha) \right)^2 + \left(Q_r + \frac{V_r^2 A}{B} \sin(\beta - \alpha) \right)^2 = \left(\frac{V_r V_t}{B} \right)^2$$



Diagrama de círculo

- Al igual que el generador, existe un límite térmico de la línea.
- Luego, la carta debe dar cuenta de ambos límites simultáneamente.

