Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Sistemas de Telecomunicaciones EL55a.

Capítulo 3.

"Transmisión Digital" .

Profesor: Néstor Becerra Yoma

Temario del Capítulo.

3. Transmisión Digital.

- En este capítulo se presentarán los fundamentos básicos en los que se basan las comunicaciones digitales.

- Se estudiarán las ventajas y desventajas de la digitalización

3. Transmisión Digital.

- *Ventajas de la Digitalización:*
  - Menores costos de procesamiento.
  - Menor vulnerabilidad al ruido por parte de las señales digitalizadas.
  - Facilidad para medir rendimiento y tasas de error.
  - Capacidad de aplicar métodos de corrección de errores o recuperación de la señal.

3. Transmisión Digital.

- *Desventajas de la Digitalización:*
  - El procesamiento digital tiene implícito un retardo.
  - La conversión A/D y D/A introduce ruido de Cuantización.
  - Necesita sincronización.
  - Incompatibilidad con sistemas analógicos.

3.1 Ruido.

- Cualquier energía eléctrica-electromagnética no deseada presente en la banda de frecuencia de un circuito de comunicación.
- Categorías generales:
  - Correlacionado.
  - No–correlacionado.

3.1 Ruido.

- **No-Correlacionado.**
  - Este ruido está presente sin importar si hay señal o no.
  - Puede ser externo o interno a los dispositivos.

3.1 Ruido.

- **No-Correlacionado.**
  - **Externo:** Se debe a ruido atmosférico o estática, ruido del espacio.
    - 30Mhz es la frecuencia del ruido atmosférico
    - 8Mhz a 1,5Ghz es la frecuencia de los ruidos del espacio (soles y galaxias)
  - **Interno:** Ruido ocasionado dentro de dispositivos electrónicos.
    - Térmico
    - De disparo
    - De tránsito

3.1 Ruido.

- **No-Correlacionado.**
  - Ruido Interno Térmico:
    - Movimiento aleatorio de los electrones por agitación térmica.

$$No = kT\left[W / Hz\right]$$

- k =Constante de Boltzmann (1,38 x 10-23 [J/°K])
- T= Temperatura Absoluta °K
- A temperatura ambiente la densidad de potencia de ruido disponible es:

  - No = $1,38 \times 10^{-23} \times 290 = 4 \times 10^{-21}$ [W/Hz]

3.1 Ruido.

- **No-Correlacionado.**
  - Ruido Interno Térmico:

    En dBm:

$$No = 10\log\left[\frac{kT}{10^{-3}}\right] = -174\left[dBm\right]$$

3.1 Ruido.

- **No-Correlacionado.**
  - Ruido Interno Térmico:
    - La potencia total de ruido en un ancho de banda B es:

$$N = NoB = kTB[W]$$

    - En dBm:

$$No = 10\log\left[\frac{kTB}{10^{-3}}\right][dBm]$$

3.1 Ruido.

- **No-Correlacionado.**
  - ***Ruido Interno Térmico:***
    - Como el ruido térmico es igualmente distribuido en el espectro de frecuencias se le denomina ruido blanco en analogía a la luz blanca que contiene todas las frecuencias de la luz visible.
  - ***Ruido Interno de Disparo:***
    - Producido por la llegada de portadores a los terminales de un dispositivo semiconductor de manera aleatoria.
    - Es proporcional a la corriente y al ancho de banda del sistema de comunicaciones.
    - Es aditivo al ruido interno térmico.
  - ***Ruido Interno de Tránsito:***
    - Generado en transistores BJT debido al retardo introducido por la base para el viaje de los portadores desde el emisor al colector
    - Es importante en alta frecuencia.

3.1 Ruido.

- **Correlacionado.**
  - Energía eléctrica no deseada que está presente como un resultado directo de una señal.
  - Se divide dos tipos:
    - Distorsión armónica.
    - Ruido de Intermodulación.

3.1 Ruido.

- **Correlacionado.**
  - Distorción armónica:
    - Generación de armónicas no deseadas por la amplificación no lineal de una señal sinusoidal.

    - Distorsión armónica total (THD):

$$THD = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + \cdots + V_n^2}}{V_1} \times 100\%$$

Con V en valores efectivos.

3.1 Ruido.

- **Correlacionado.**
  - Ruido de Intermodulación:
    - Son las frecuencias no deseadas del producto cruzado (sumas y diferencias) de dos señales cuando son amplificadas en un dispositivo no lineal.
    - Ejemplo: estaciones radiobase de telefonía celular.

3.2 Teorema de Muestreo y Máxima Capacidad de Canal

- Componentes de un sistema Análogo-Digital:

En donde:

Xa(t): señal analógica (t real)

X(n): señal discreta (n discreto tq. n=0,1,.......)

Xq(n): señal digital

3.2 Teorema de Muestreo y Máxima Capacidad de Canal.

- Componentes de un sistema Análogo-Digital:
  - ✓ La primera etapa es el muestreo de la señal análoga.
  - ✓ Este muestrea una tasa tal que el proceso pueda ser reversible.
  - ✓ Aquí lo que se discretiza es la variable independiente (variable temporal).
  - ✓ Esta tasa esta dada por el Teorema del Muestreo, el cual se enuncia a continuación.

3.2 Teorema de Muestreo y Máxima Capacidad de Canal.

- Teorema del muestreo (Nyquist):

La frecuencia más alta contenida en una señal analógica Xa(t) es Fmáx=B y la señal se muestrea a velocidad F2 > 2Fmáx = 2B entonces Xa(t) se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras.

Si la tasa de muestreo es menor a 2B se produce ***"aliasing"*** o distorsión de la señal recuperada a esta tasa.

3.2 Teorema de Muestreo y Máxima Capacidad de Canal.

- Teorema del muestreo:

  - *"Según el teorema el proceso de muestrear un señal en el tiempo y obtener una representación discreta es reversible siempre y cuando la tasa de muestreo sea el doble de la máxima frecuencia contenida en la señal analógica".*
  - Después de esta etapa se obtiene una señal discreta en tiempo pero que puede tener un rango infinitos de valores dentro de un intervalo (en el cual se define la señal) real.
  - Para obtener una señal digital es necesario, entonces, ***cuantizar***, con tal que el resultado este dentro de un conjunto finito y conocido de valores, y pueda ser posteriormente procesada.

3.3 Error de Cuantización y ruido.

- ***Cuantización:***

  Definición: Proceso de transformar una señal de amplitud continua en una señal digital, donde se asocia cada muestra a un conjunto de números finitos.

  – Proceso lineal e irreversible.

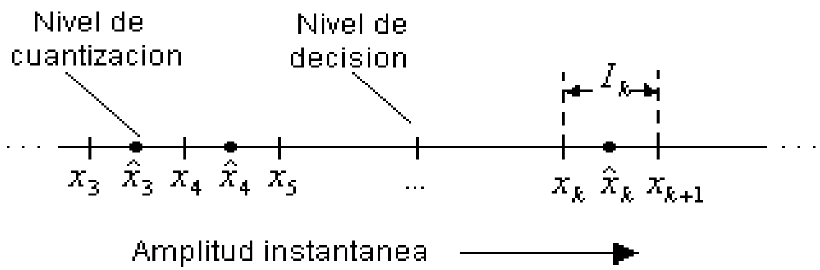
  – Proceso induce necesariamente en algún error.

  – Por este error se estudiará un método para obtener una expresión que sirva para representarlo.

3.3 Error de Cuantización y ruido.

- **Cuantización:**
  - Mapea una amplitud dada X(n) = X(nT) en tiempo t = nT dentro de una amplitud Xk, tomado desde un conjunto finito de valores.
  - La figura siguiente ilustra el procedimiento con L intervalos y L + 1 niveles de decisión.

$$I_k = \{x_k < x(n) < x_{k+1}\} \qquad k = 1,2,....L$$



3.3 Error de Cuantización y ruido.

- **Cuantización:**
  - Las posibles salidas del cuantizador son denotadas por: $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots\ldots, \hat{x}_L$
  - El cuantizador frecuentemente utilizado es el cuantizador lineal o uniforme, definido por:

$$\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k = \Delta \qquad k = 1,2,\ldots., L-1$$

$$x_{k+1} - x_k = \Delta \qquad \text{Para } x_{k+1}, x_k \text{ finitos}$$

•Donde Δ es el tamaño del paso del cuantizador.

•Se puede ver fácilmente que error del cuantizador está siempre en el rango -Δ/2 a Δ/2:

$$-\frac{\Delta}{2} < e_q(n) \leq \frac{\Delta}{2}$$

3.3 Error de Cuantización y ruido.

- **Cuantización:**
  - Luego el error de cuantización instantáneo no puede exceder la mitad del paso de cuantización.
  - Si el rango dinámico de la señal, definido como:

$$x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}$$

… *es más grande que el rango del cuantizador*, las muestras que exceden el rango del cuantizador son recortadas, resultando en un error más grande que $\Delta/2$.

3.3 Error de Cuantización y ruido.

- **Cuantización:**
  - El proceso de codificación en un conversor A/D asigna un número binario único a cada nivel de cuantización.
  - Si tenemos L niveles, se necesitarán a lo menos L números binarios distintos.
  - Con una palabra de largo b+1 bits se pueden representar 2^{b+1} números binarios distintos.
  - Entonces podríamos tener $2b+1 \geq L$ o, equivalentemente $b+1 \geq \log2 L$.
  - Entonces el tamaño del paso o la resolución del conversor A/D esta dada por:

$$\Delta = \frac{R}{2^{b+1}}$$

Donde R es el rango del cuantizador.

3.3.1 Análisis del error de cuantización.

- La dependencia del error de cuantización en las características del la señal de entrada y la naturaleza no lineal del cuantizador hacen de análisis determinístico intratable, excepto en casos muy simples.
- En el presente análisis se asume que el error de cuantización es de naturaleza aleatorio, y se modela como un ruido que es sumado a la señal original.

3.3.1 Análisis del error de cuantización.

- Se requieren los siguientes supuestos sobre las propiedades estadísticas de eq(n):

- El error eq(n) está uniformemente distribuido sobre el rango $-\Delta/2 < eq(n) < \Delta/2$.
- La secuencia { eq(n) } es una secuencia de ruido blanco estacionario. En otras palabras, el error eq(n) y el error eq(m) para $m \neq n$ están no correlacionados.
- La secuencia de error {eq(n)} está no correlacionada con la secuencia de señal X(n).
- La secuencia de la señal X(n) es de media cero y estacionaria.

3.3.1 Análisis del error de cuantización.

El efecto del ruido aditivo sobre la señal puede ser cuantizado y representado en escala logarítmica de la siguiente manera: σ_x^2

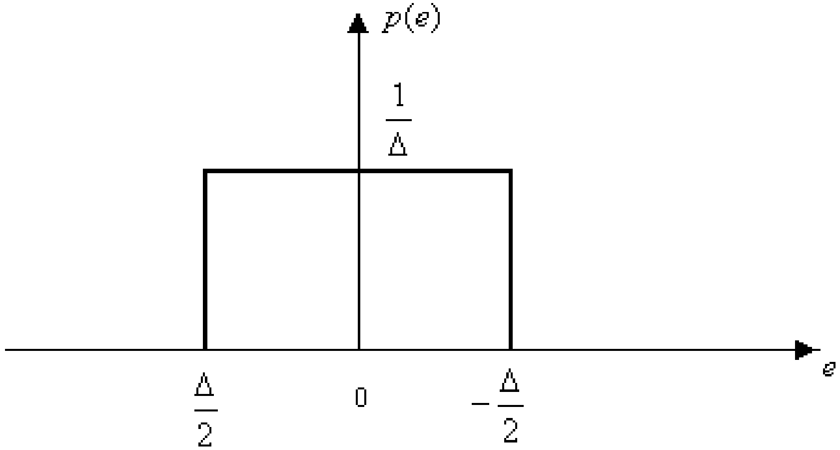
$$SQNR = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_n}$$

donde Px = $E[X^2(n)]$ es la potencia de la señal y
Pn = σ_n^2 = $E[eq^2(n)]$ es la potencia del ruido de cuantización.

3.3.1 Análisis del error de cuantización.

Si el ruido de cuantización está uniformemente distribuido en el rango (-Δ/2, Δ/2) como muestra la Figura 3.3, el valor medio del error es cero y la varianza (la potencia del ruido de cuantización) es:

$$P_n = \sigma_e{}^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p(e) de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12}$$



3.3.1 Análisis del error de cuantización.

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$SQNR = 6.02b$$

si la señal es uniformemente distribuida entre –L/2 y L/2.

La formula general para el SQNR es usada frecuentemente para especificar la precisión necesaria en un conversor A/D. Esta simplemente significa que cada bit adicional en el cuantizador aumenta la relación señal ruido en 6 dB.

3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

- Los valores discretos de la señal se pasan a pulsos para poder ser transmitidos por algún canal de comunicaciones.
- Para ellos se usan métodos de modulación de pulsos de diversos tipos:
  - PWM (Pulse Width Modulation).
  - PPM (Pulse Position Modulation).
  - PAM (Pulse Amplitud Modulation).
  - PCM (Pulse Code Modulation).

3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

1. ***PWM (Pulse Width Modulation):***

   El ancho del pulso es proporcional a la amplitud de la señal analógica.

2. ***PPM (Pulse Position Modulation):***

   La posición de un pulso (de ancho constante) dentro de una ranura de tiempo determinada varía proporcionalmente a la amplitud de la señal.

3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

3. PAM (Pulse Amplitud Modulation):

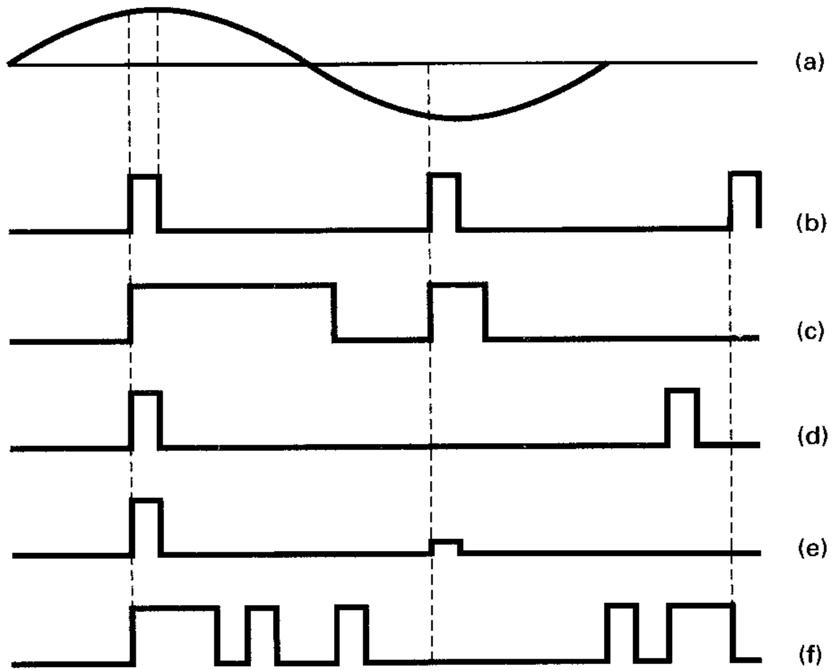
La amplitud de un pulso fijo (de ancho constante) varía de acuerdo a la amplitud de la señal.

4. PCM (Pulse Code Modulation):

A cada nivel de cuantización se le es asignado un número binario (código) de largo fijo. El número binario varía su valor de acuerdo a la amplitud de la señal.

3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

La Figura muestra un ejemplo para cada tipo de modulación:



a) Señal análoga; b) Pulsos de muestreo;
c) PWM; d) PPM; e) PAM; f) PCM

3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

La relación que se cumple entre los L niveles de cuantización y los b bits del código es:

$$2^b \geq L$$

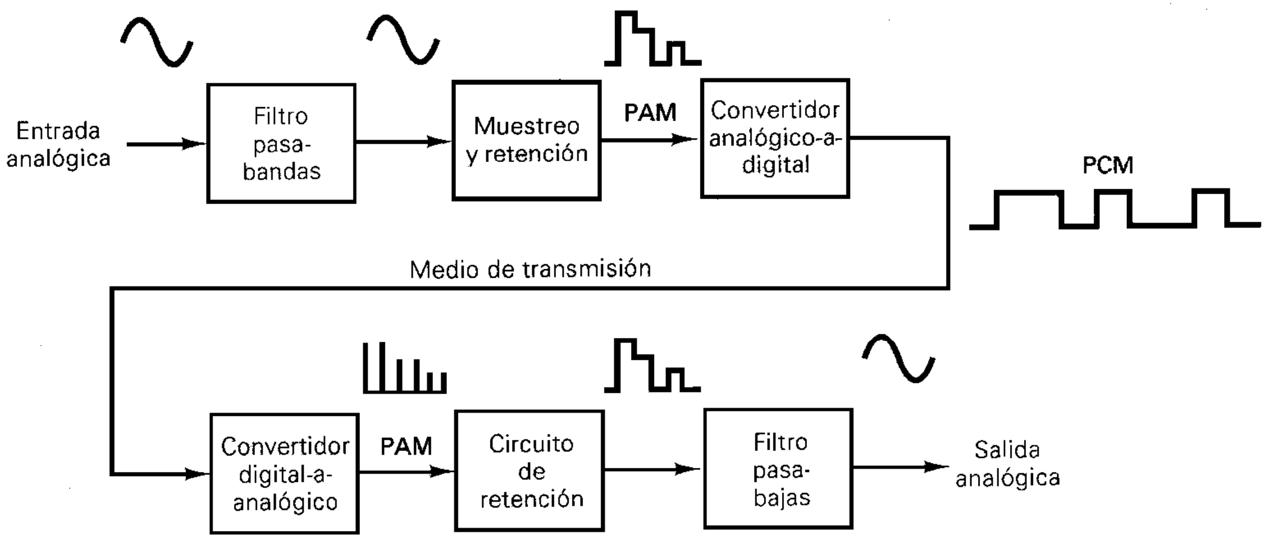
$$\Rightarrow \; b = \lceil \log_2 L \rceil$$

Esto refleja que el método mayormente utilizado es PCM. Características:

- Duración Fija.
- Carácter Binario 1 ó 2.

3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

- **Esquema PCM:**



3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

- **PCM:**
  - Codificadores.
    - Para enviar.
  - Decodificadores.
    - Para Recibir.

  - Sistema de Codificación y decodificación se conoce como “CODEC”.
    - Su eficiencia se define como:

$$\textit{Eficiencia del codificador} = \frac{\textit{mínimo número de bits} \times 100}{\textit{número real de bits (incluyendo bit de signo)}}$$

3.4 Pulse Code Modulation (PCM).

- **PCM:**
  - ***Lineales:***

    Asignan en forma uniforme a los niveles de cuantización los códigos correspondientes.
  - ***No Lineales:***

    Asignan un mayor número de códigos a ciertos niveles de amplitud.

3.4.1 Compansión:

Es el proceso conjunto de:

- Comprimir:
  - Para transmitir la señal.
- Descomprimir:
  - Para re-armar la señal al momento de recibir la señal.
- Dependerá de las características de la señal sobre que modalidad de compansión se use.
- Son dos las compansiones mas comunes siendo ambas logarítmicas:
  - Ley-μ
  - Ley-A

3.4.1 Compansión:

- **Ley-μ:**
  - Es usada en Estados Unidos y Japón.

$$V_{salida} = \frac{V_{máximo} \times \ln(1 + \mu V_{entrada} / V_{máxima})}{\ln(1 + \mu)}$$

Donde:

Vmáximo **=** Máxima amplitud de entrada analógica descomprimida.

Ventrada **=** Amplitud de la señal de entrada en un instante particular del tiempo

μ **=** Parámetro usado para definir la cantidad de compresión.

Vsalida **=** Amplitud de salida comprimida.

3.4.1 Compansión:

- **Ley-A:**
  - Es usada en Europa.

$$V_{salida} = V_{máximo} \frac{AV_{entrada}/V_{máximo}}{1+\ln A} \qquad 0 \leq \frac{V_{entrada}}{V_{máximo}} \leq \frac{1}{A}$$

$$V_{salida} = V_{máximo} \frac{1+\ln(AV_{entrada}/V_{máximo})}{1+\ln A} \qquad \frac{1}{A} \leq \frac{V_{entrada}}{V_{máximo}} \leq 1$$

3.5 Máxima Capacidad de Canal.

- Shannon, en 1948, la definió como:

$$C = B\log_2\left[1+\frac{S}{N}\right]$$

con una relación señal ruido S/N y un ancho de banda B

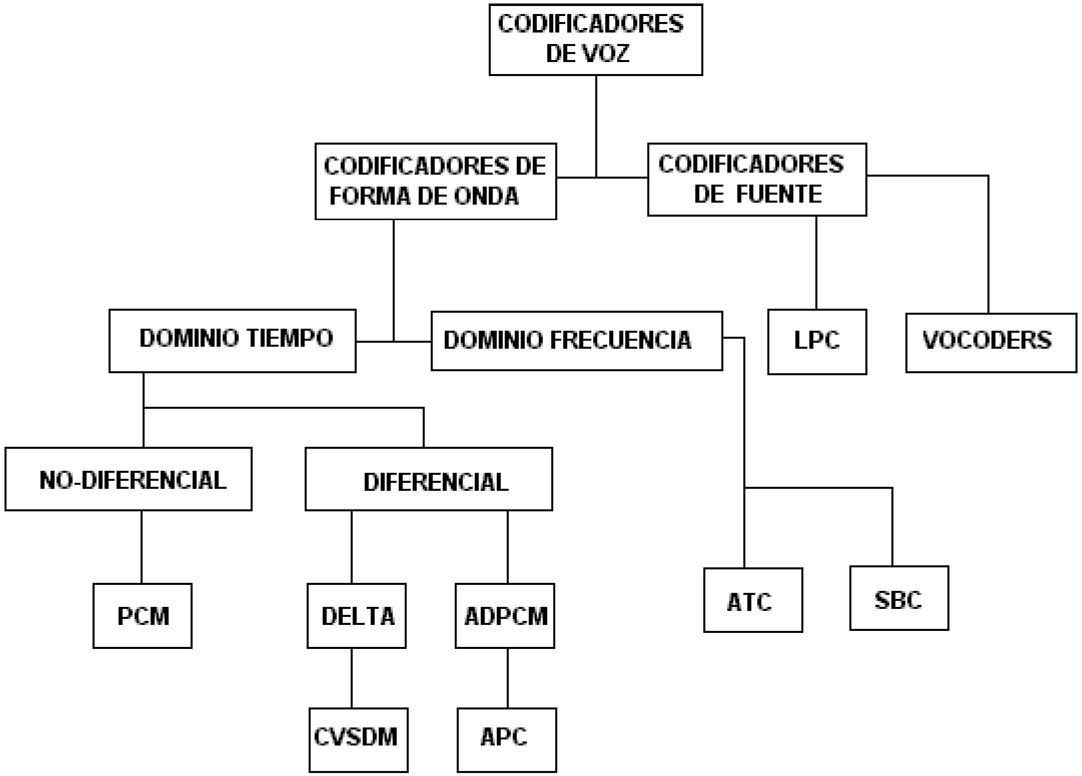
3.6 Codificación de Voz.

3.6.1 Introducción.

- El propósito es poder transmitir voz con la mayor calidad posible usando la menor cantidad de capacidad de canal posible.
- Esto genera un trade-off entre ambas cosas ya que:
  - Entre más complejo es un algoritmo, más retraso de procesamiento y costo de implementación requiere y viceversa.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.1 Introducción.



Jerarquía de Codificadores

3.6 Codificación de Voz.

3.6.1 Introducción.

Clasificación de los Codificadores de voz:

- Codificador de Forma de Onda
- Vocoders

3.6 Codificación de Voz.

3.6.1 Introducción.

Codificador de Forma de Onda:

- Se esfuerzan por reproducir la forma de onda en el tiempo o frecuencia de la señal de voz tan cercanamente como sea posible.
- fueron diseñados para ser independientes de la fuente y por lo tanto codifican igualmente bien una variedad de señales.
- Robustos:
  - Al ruido ambiental
  - Amplio rango de características de voz
- Ejemplos:
  - PCM, ADPCM, DM, APC, entre otros.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.1 Introducción.

Vocoder:

- Vocoders alcanzan tasa de bits menores.
- Son más complejos.
- Se basan en modelos de la producción de la voz.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.2 Características de la Señal de Voz.

- Distribución de Probabilidad no uniforme de amplitud.
- Auto-correlación distinta de cero entre muestras.
- Espectro de voz no plano.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.2 Características de la Señal de Voz.

Las características más explotables de ésta:

- Es de banda limitada
- función de densidad de probabilidad no uniforme.

La función exponencial dada a continuación provee una buena aproximación para señales de calidad telefónica.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_x}} \exp(-\sqrt{2}|x| / \sigma_x)$$

3.6 Codificación de Voz.

3.6.2 Características de la Señal de Voz.

- La propiedad de las señales de voz la cual indica que existe mucha correlación entre muestras adyacentes de segmentos de voz permite realizar predicción utilizando las muestras previas con un pequeño error aleatorio.

- La característica no plana de la densidad espectral hace posible obtener compresión significativa de código de voz en el dominio de la frecuencia.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.3 Técnicas de cuantización.

Existen dos técnicas:

- Cuantización uniforme (ya vista en etapas anteriores).
- Cuantización no uniforme.

Cuantización no-Uniforme:

- Intenta distribuir los niveles de cuantización de forma más eficiente, tratándolos de acuerdo a la fdp de la señal de entrada.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.3.- Técnicas de cuantización.

Cuantización no-Uniforme:

- Para una señal de entrada se tiene una distorsión de la forma:

$$D = E\left[\left(x - f_Q(x)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - f_Q(x)\right]^2 p(x)\,dx$$

Donde:

x(t): señal de voz
fQ: señal de voz cuantizada
p(x): fdp

"Luego se ve que la distorsión se reduce si se reduce el ruido de cuantización en donde fdp es grande".

3.6 Codificación de Voz.

3.6.3. Técnicas de cuantización.

- Una implementación simple de un cuantizador no uniforme es el cuantizador logarítmico.

- Este usa pasos de cuantización fina para amplitudes bajas que ocurren frecuentemente en voz y usa pasos más gruesos para las menores frecuencias.

- Se obtiene cuantización no uniforme al pasar primeramente la señal de voz análoga por un compansor (ley – A o ley - μ) y luego pasar la voz ya comprimida por un cuantizador estándar uniforme.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.4. Vocoders.

- Analizan la señal de voz, transmitiendo parámetros derivados del análisis.
- En el receptor se sintetiza la voz usando estos parámetros.
- Modelan el proceso de generación de voz como un sistema dinámico tratando de cuantificar ciertas restricciones físicas del sistema.
- Más complejos que los codificadores de forma de onda.
- Alcanzan más economía en la tasa de transmisión.

3.6 Codificación de Voz.

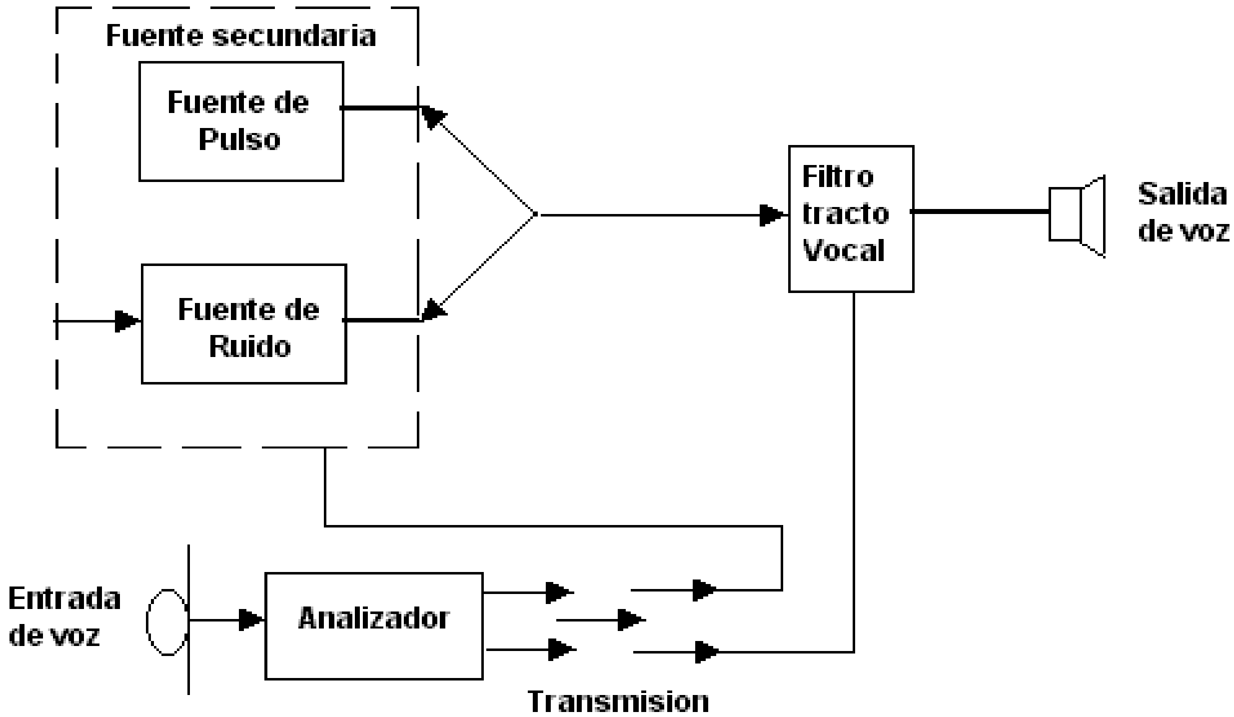
3.6.4.- Vocoders

- Son menos robustos
- Su ejecución tiende a depender del locutor .
- El más conocido es el LPC (*Linear Predictive Coder).*
- CELP y RELP utilizan el mismo concepto combinado con codificación por síntesis.

3.6 Codificación de Voz.

3.6.4 Vocoders

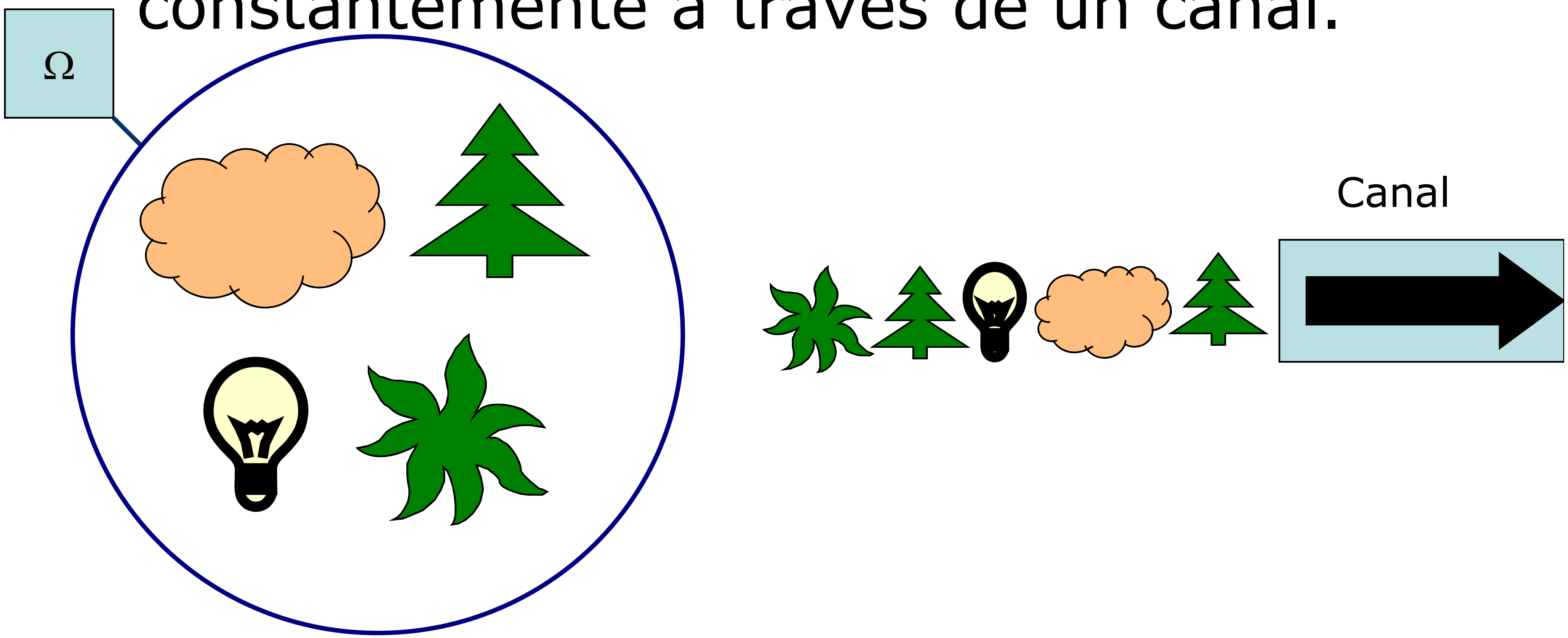
– LPC (*Linear Predictive Coder).*



Modelo de generación de voz

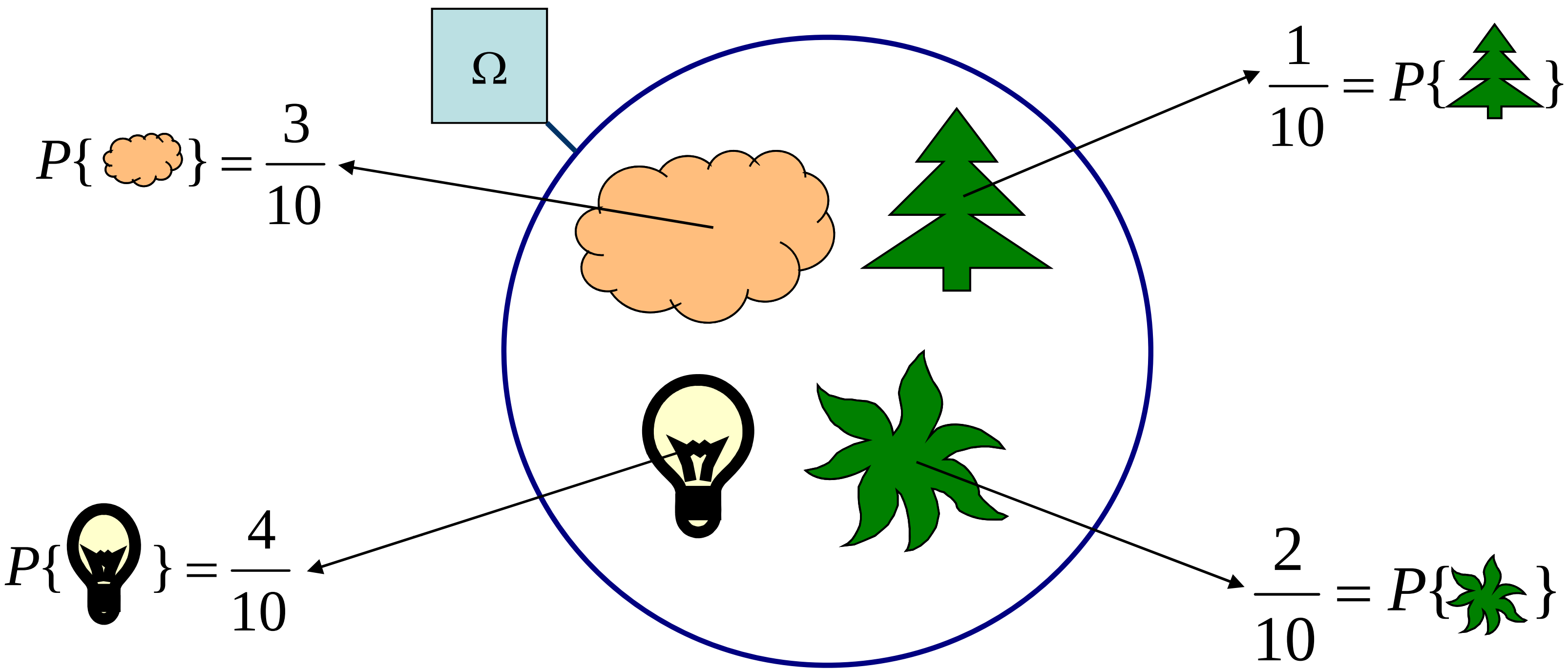
3.7 Probabilidades de símbolos

- Se tiene un conjunto de varios símbolos, los que son enviados constantemente a través de un canal.



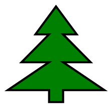
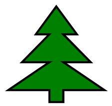
3.7 Probabilidades de símbolos

- A cada símbolo se le puede asociar una probabilidad de acuerdo a la frecuencia con que es enviado a través del canal.



3.7 Probabilidades de símbolos

- La probabilidad de enviar un símbolo A o un símbolo B es igual a la suma de las probabilidades de enviar cada uno.

$P\{$  $,$  $\} = P\{$  $\} + P\{$  $\}$

3.7 Probabilidades de símbolos

- La probabilidad de que se envíe una <u>secuencia</u> de símbolos dada (un <u>mensaje</u>) se obtiene multiplicando la probabilidad de cada símbolo a enviar.
- Lo anterior es válido suponiendo independencia entre los símbolos (el símbolo anterior no influye en el próximo a enviar)

3.8 Representación de mensajes

- Para poder enviar los mensajes por el canal es necesario codificar cada símbolo mediante una secuencia de bits
- Uno de los métodos más eficientes para asignar secuencias de bits a los símbolos es el algoritmo de Huffman que asigna secuencias más largas a los símbolos menos probables.
- Este método se usa comúnmente para comprimir archivos de computador (tipo winzip)

3.8 Representación de mensajes

- Ejemplo: Se tiene el siguiente mensaje:
  - “mi mama me mima”
- Encontrar una secuencia de bits para cada símbolo (carácter) de modo de que el largo en bits del mensaje sea mínimo
  - Primero se deben calcular las probabilidades para cada símbolo. Par esto, se cuenta cuántas veces aparece cada uno.

‘m’=6 ‘ ’=4 ‘a’=3 ‘i’=2 ‘e’=1

3.8 Representación de mensajes

'm'=6 ' '=4 'a'=3 'i'=2 'e'=1

$$P\{m\}=\frac{6}{16},\ P\{\ \}=\frac{4}{16},\ P\{a\}=\frac{3}{16},\ P\{i\}=\frac{2}{16},\ P\{e\}=\frac{1}{16}$$

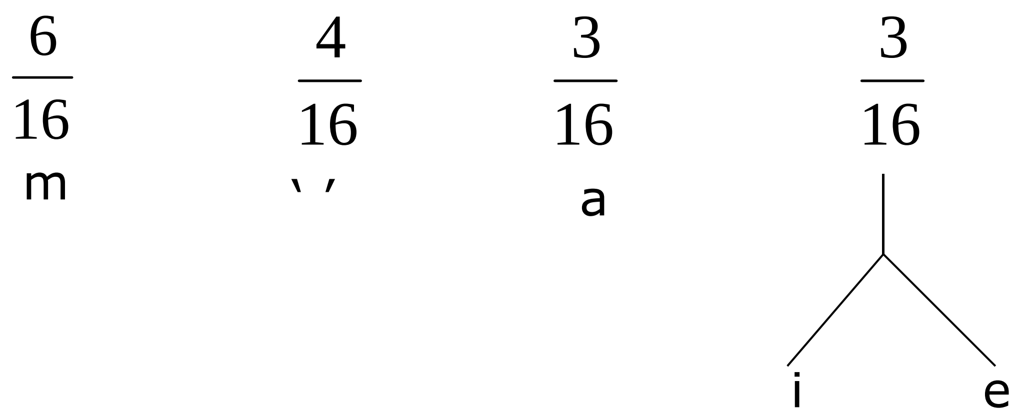
– Ahora se debe ir formando un arbol del siguiente modo: "se eligen los 2 símbolos menos probables y se agrupan como un nuevo símbolo"

3.8 Representación de mensajes

$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
m	‘ ’	a	i	e

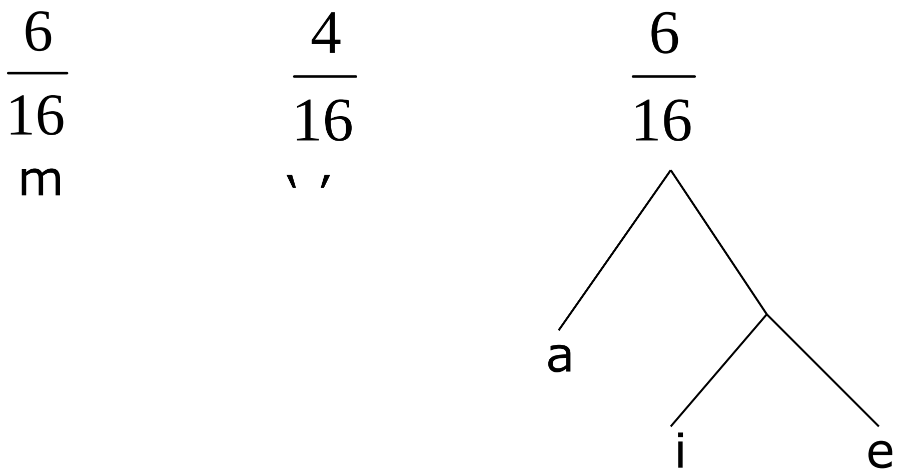
- Se agrupan la ‘i’ y la ‘e’, ya que son los menos probables

3.8 Representación de mensajes



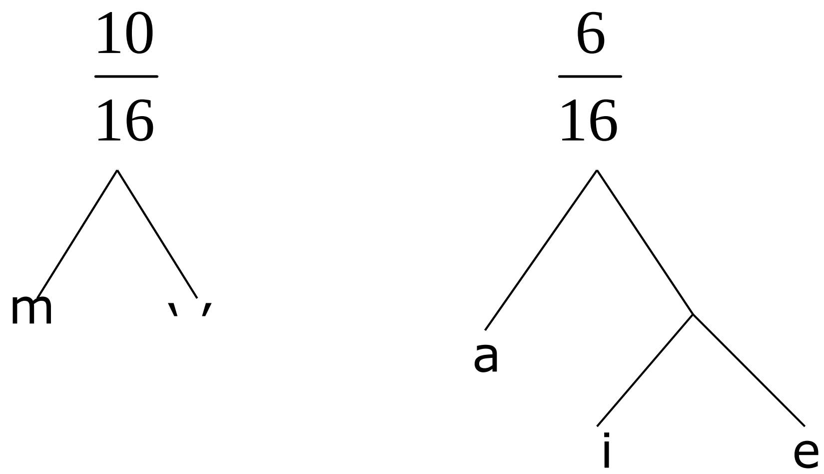
- Se agrupan la 'ie' y la 'a', ya que son los menos probables

3.8 Representación de mensajes



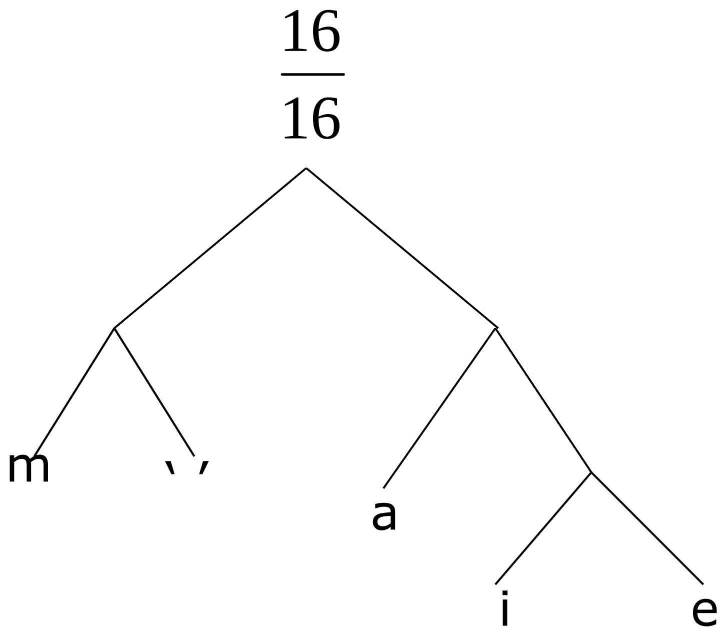
- Se agrupan la ‘m’ y el ‘ ’, ya que son los menos probables

3.8 Representación de mensajes



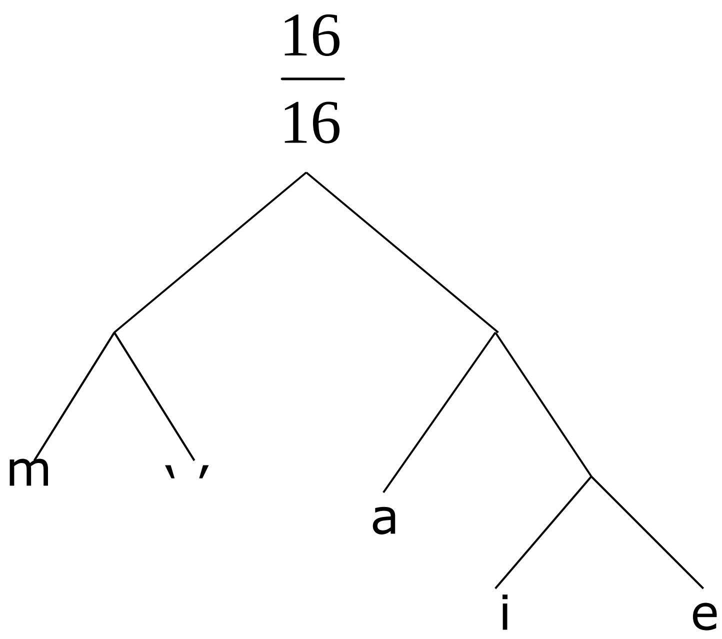
- Se agrupan los dos últimos que quedan

3.8 Representación de mensajes



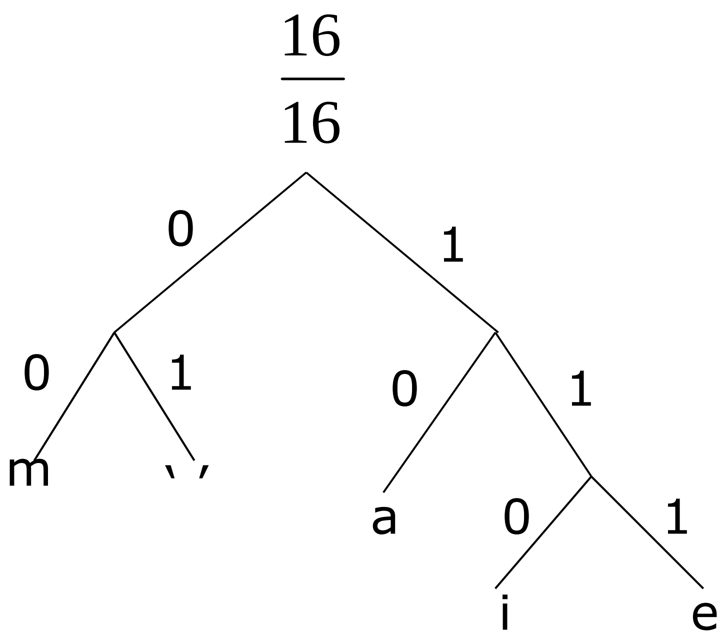
- Tenemos todos los símbolos agrupados en un árbol. Ahora hay que asignarles las secuencias de bits

3.8 Representación de mensajes



- Para esto, asignamos ‘1’ al ir hacia la derecha y ‘0’ al ir hacia la izquierda

3.8 Representación de mensajes



'm'=00
' '=01
'a'=10
'i'=110
'e'=111

3.8 Representación de mensajes

'm'=00 $P\{m\} = \frac{6}{16}$

' '=01 $P\{\ \} = \frac{4}{16}$

'a'=10 $P\{a\} = \frac{3}{16}$

'i'=110 $P\{i\} = \frac{2}{16}$

'e'=111 $P\{e\} = \frac{1}{16}$

- Se puede apreciar que los símbolos más probables recibieron secuencias de bits cortas, mientras que los menos probables recibieron secuencias de bits más largas
- De este modo, el mensaje queda codificado con la mínima cantidad de bits

3.8 Representación de mensajes

‘m’=00 ‘ ’=01 ‘a’=10 ‘i’=110 ‘e’=111

“mi_mama_me_mima”=
=001100100100010010011101001100010

- La otra alternativa (la más obvia) era asignar el mismo largo a todas las secuencias de bits, sin embargo, el largo total del mensaje habría sido mayor.

3.9 Información

- La información asociada a un símbolo x se define del siguiente modo:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{P(x)} [bit]$$

- I(x) representa la mínima cantidad de bits necesaria para representar al símbolo x. Los símbolos menos probables tienen mayor información.
- Resulta interesante ver cómo se puede calcular la cantidad de información que contiene un mensaje dado

3.9 Información

- Supongamos que se tiene un mensaje de 3 símbolos independientes:

$$P\{(a,b,c)\} = P\{a\} \times P\{b\} \times P\{c\}$$

$$\frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \frac{1}{P\{a\}} \times \frac{1}{P\{b\}} \times \frac{1}{P\{c\}}$$

$$\log_2 \frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \log_2 \left(\frac{1}{P\{a\}} \times \frac{1}{P\{b\}} \times \frac{1}{P\{c\}} \right)$$

$$\log_2 \frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \log_2 \frac{1}{P\{a\}} + \log_2 \frac{1}{P\{b\}} + \log_2 \frac{1}{P\{c\}}$$

$$I(a,b,c) = I(a) + I(b) + I(c)$$

3.9 Información

$$I(a,b,c) = I(a) + I(b) + I(c)$$

- Se puede apreciar que la cantidad de información que contiene un mensaje es igual a la suma de la información que contiene cada símbolo.
- La información que contiene un mensaje representa la mínima cantidad de bits necesaria para representarlo

3.9 Información

- Ejemplo: Los símbolos A, B, C, D ocurren con probabilidad ½, ¼, 1/8 y 1/8 respectivamente. Calcular la información que contiene el mensaje “BDA”
  - Solución:
  - $I(A)=\log_2(1/(½))=\log_2(2)=1[bit]$
  - $I(B)=\log_2(4)=2[bit]$
  - $I(D)=\log_2(8)=3[bit]$
  - $I(“BDA”)=2+3+1=6[bit]$

3.9 Información

- Entropía: La entropía es la información que posee en promedio <u>un</u> símbolo que pasa por el canal

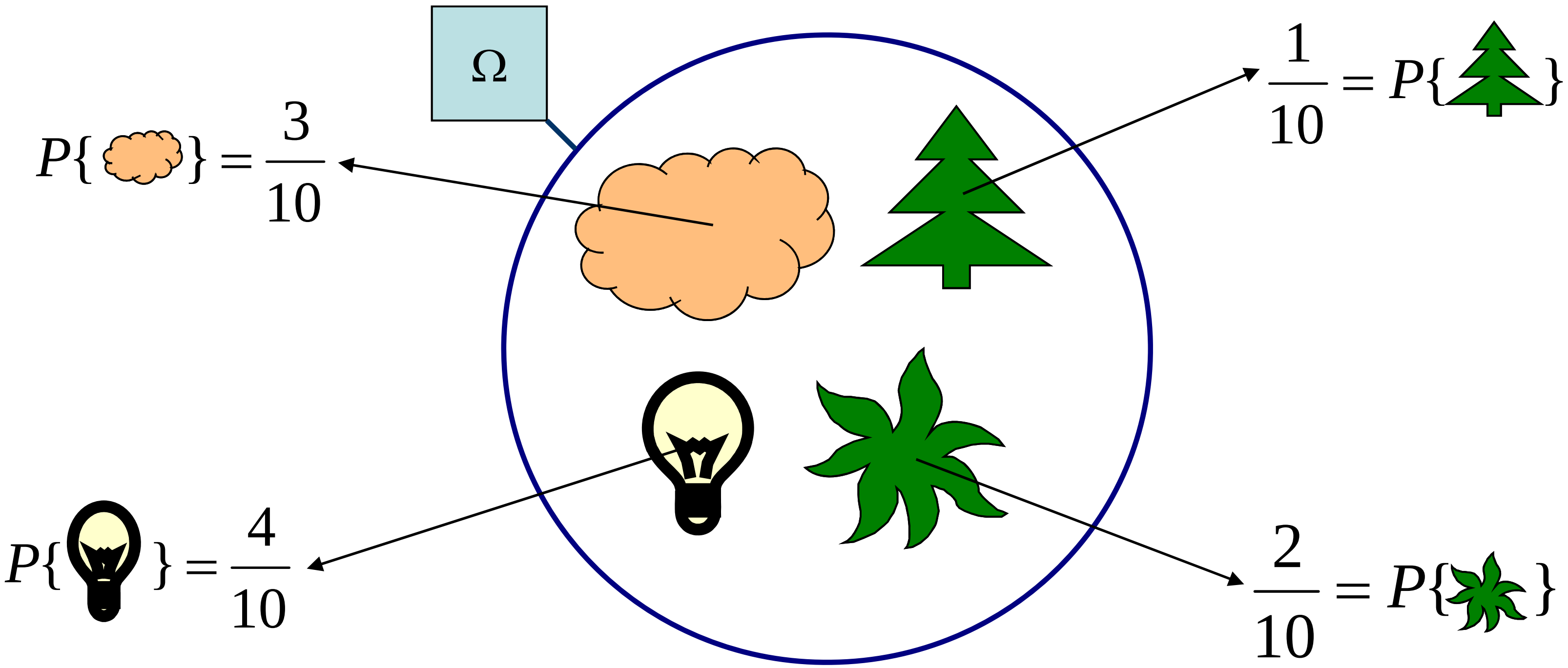
$$H = E\big(I(x)\big) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i) I(x_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} [bit]$$

- La tasa de transmisión de información es igual a $R = rH[bps]$

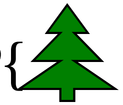
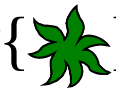
- Donde r es la tasa de símbolos (símbolos/segundo)

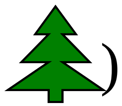
3.9 Información

- Ejemplo: calcular la entropía del conjunto Ω.



3.9 Información

$P\{$  $\} = \frac{1}{10}$ $P\{$  $\} = \frac{2}{10}$ $P\{$  $\} = \frac{3}{10}$ $P\{$  $\} = \frac{4}{10}$

$I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{10}} = \log_2 10 = 3.322$ $I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{2}{10}} = \log_2 5 = 2.322$

$I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{3}{10}} = \log_2 \frac{10}{3} = 1.737$ $I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{4}{10}} = \log_2 \frac{5}{2} = 1.322$

$$H = \frac{1}{10} \times 3.322 + \frac{2}{10} \times 2.322 + \frac{3}{10} \times 1.737 + \frac{4}{10} \times 1.322$$

$$H = 1.8465[bit]$$

3.10 Capacidad de canal

- Representa la máxima tasa de información que se puede transmitir por un canal (en bits por segundo).

- No depende de si la información es análoga o digital.

- Los canales generalmente se caracterizan por su ancho de banda (en Hertz) y la cantidad de ruido. Como referencia se utiliza el ruido blanco Gaussiano (WGN, *White Gaussian Noise*).

3.10 Capacidad de canal

- El teorema de Hartley-Shannon relaciona la capacidad máxima teórica del canal con el ancho de banda (en Hz) y la razón señal a ruido:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

C : capacidad del canal [bps]

B : ancho de banda [Hz]

S/N : razón señal a ruido (no SNR)