2. ELECTROMAGNETISMO Y CIRCUITOS MAGNETICOS

2.1. Conceptos de Electromagnetismo

2.1.1. Generalidades.

En el año 1820, Oersted descubrió que una corriente eléctrica origina un campo magnético a su alrededor, lo que constituyó un hecho clave para el desarrollo de dispositivos de conversión electromecánica de la energía.

En efecto, como es sabido, la presencia del campo magnético es imprescindible para la conversión de energía eléctrica en energía mecánica y viceversa:

- En un motor, la energía eléctrica (corriente) crea un campo de fuerza (campo magnético) bajo el cual otro elemento de corriente produce una fuerza que, bajo ciertas condiciones, genera movimiento (energía mecánica).

- En un generador, la variación en el tiempo de la geometría de un circuito magnético (energía mecánica) produce una variación en el tiempo del flujo magnético que induce voltajes en los circuitos eléctricos que lo enlazan (energía eléctrica).

Siendo fundamental en ambos casos la presencia del campo magnético, se estudiara éste con algún detalle.

2.1.2. Campo magnético.

Ciertos minerales (magnetita) tienen la propiedad de atraer trozos de fierro, y constituyen los denominados imanes permanentes naturales. Se dice entonces, que existe un "campo de fuerzas" o "campo magnético" en el entorno del imán permanente, cuya variable fundamental que lo describe es la inducción magnética o densidad de flujo magnético: $\vec{B}$.

Esta variable vectorial define las líneas de fuerza o líneas de campo magnético: tiene dirección tangente a ellas y su magnitud es mayor mientras mayor es la cantidad de líneas por unidad de área. En la figura 2.1 se ilustra el campo magnético en el caso de un imán permanente y se observa que la densidad de flujo magnético es mayor en el interior del imán, donde es mayor la densidad de líneas de campo magnético.

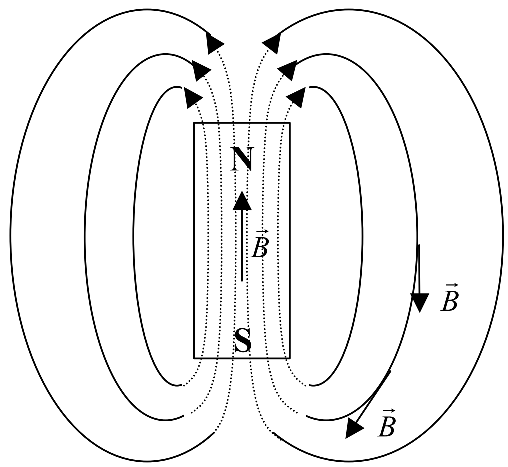


Figura 2.1. Campo magnético de imán permanente.

Se define el flujo de líneas de campo a través de una superficie S cualquiera, como:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{2.1}$$

Las unidades de ϕ, y las correspondientes de $\vec{B}$, son las indicadas en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Unidades de ϕ y B.

	ϕ	$\vec{B}$
Sistema CGS	[lines]	[lines/cm^2] = [Gauss]
Sistema MKS	[Wb] (Weber)	[Wb/m^2] = [Tesla]
Equivalencias	1 [Wb] = 10^8 [lines]	1 [Tesla] = 10^4 [Gauss] = 10 [kGauss]

El campo magnético también puede ser creado por una corriente eléctrica. En la figura 2.2 (a) se indica la forma de una de las líneas del campo magnético creado por una corriente "***i***" que circula en un conductor rectilíneo infinito (experiencia de Oersted).

En la figura 2.2.(b) se indica la forma que adopta el campo magnético al disponer el conductor en forma de una bobina. Se aprecia que en este caso la configuración se asemeja a la de un imán permanente, razón por la cual a la bobina se le suele llamar electroimán.

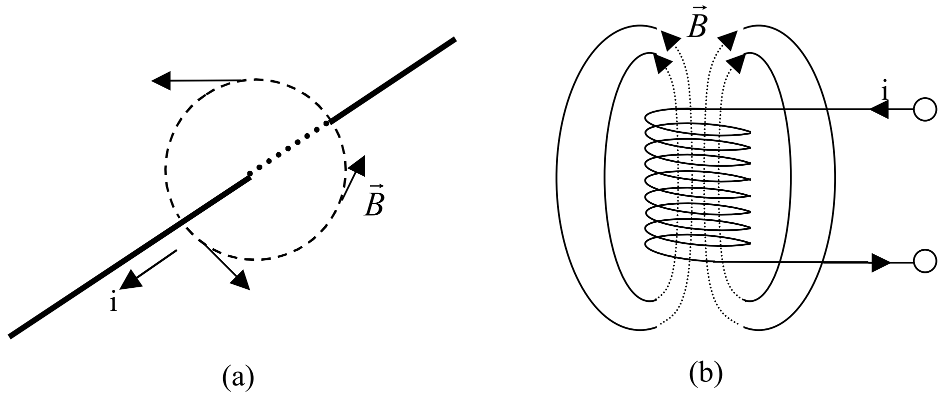


Figura 2.2. Campos magnéticos creado por corriente eléctrica

La ley de Ampere relaciona la densidad de corriente eléctrica $\vec{J}$ y la densidad de flujo magnético $\vec{B}$ creado por esta, mediante:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \tag{2.2}$$

La primera integral se efectúa sobre una trayectoria cerrada, plana, cualquiera, y la segunda integral sobre la superficie encerrada por dicha trayectoria; μ_0 es una característica del medio, denominada permeabilidad magnética, y tiene un valor $\mu_o = 4\pi \bullet 10^{-7}$ [H/m] para materiales no ferromagnéticos.

En el caso que las líneas de corriente eléctrica no estén distribuidas en el medio material, sino concentradas en un conductor, la segunda integral de la ecuación (2.2) no es otra cosa que la corriente eléctrica "***i***" por el conductor, simplificándose dicha ecuación a:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \cdot i \tag{2.3}$$

Siendo en este caso "***i***" la corriente eléctrica total que atraviesa la trayectoria de integración considerada para $\vec{B}$.

La ecuación (2.3) (ley de Ampere) también se puede escribir en una forma más generalizada (ley de Biot-Savarat); para ello puede expresarse el valor $d\vec{B}$ de la densidad de flujo producida por un elemento conductor de longitud $d\vec{\ell}$ recorrido por una corriente "***i***", en un punto a distancia $\vec{r}$ del elemento de conductor, como: (ver figura 2.3)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o \cdot i \cdot d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \tag{2.4}$$

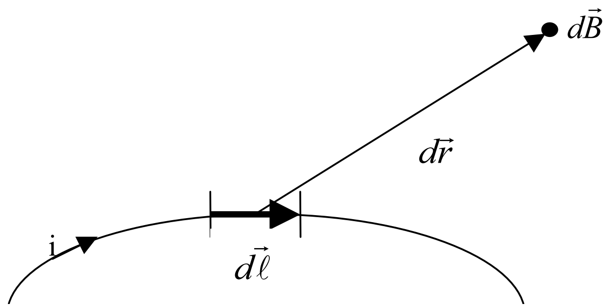


Figura 2.3. Ley de Biot-Savarat.

2.1.3. Principios básicos del motor eléctrico

Como se vio, un campo magnético (ya sea producido por un imán permanente o por una corriente eléctrica) es un campo de fuerzas, donde al ubicarse un segundo conductor recorrido por una corriente eléctrica, este queda sometido a una fuerza, lo cual es el principio básico de cualquier motor eléctrico.

En el caso más elemental de una partícula con carga "***q***" que se desplaza a velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$, ésta queda sometida a una fuerza:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{2.5}$$

Si en lugar de una carga eléctrica se trata de una corriente "***i***" que circula por un conductor, la expresión anterior puede expresarse:

$$i = dq/dt$$
$$\vec{v} = d\vec{\ell}/dt$$
$$d\vec{F} = i \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \tag{2.6}$$

Donde $d\vec{\ell}$ es la longitud del elemento de conductor.

Conforme a lo anterior, la fuerza total sobre el conductor será:

$$\vec{F} = \int i \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B} \tag{2.7}$$

Así, en un motor, si los conductores están dispuestos en forma que sea factible desplazarlos, esta fuerza provocara su movimiento, produciéndose entonces la conversión electromecánica de la energía.

Como ejemplo ilustrativo, en la figura 2.4 se muestra un motor formado por una espira plana, alimentada por una corriente "***i***", libre de girar sobre su eje, y ubicada en un campo magnético de valor $\vec{B}$ uniforme.

El campo $\vec{B}$ puede ser producido por un imán permanente, o bien por un electroimán constituido por una bobina alimentada por una fuente de C.C.

Los lados axiales de la espira quedan sometidos a las fuerzas indicadas ($\left|\vec{F}\right| = i \cdot \ell \cdot \left|\vec{B}\right|$), produciéndose un torque motriz sobre el eje que es función de la posición:

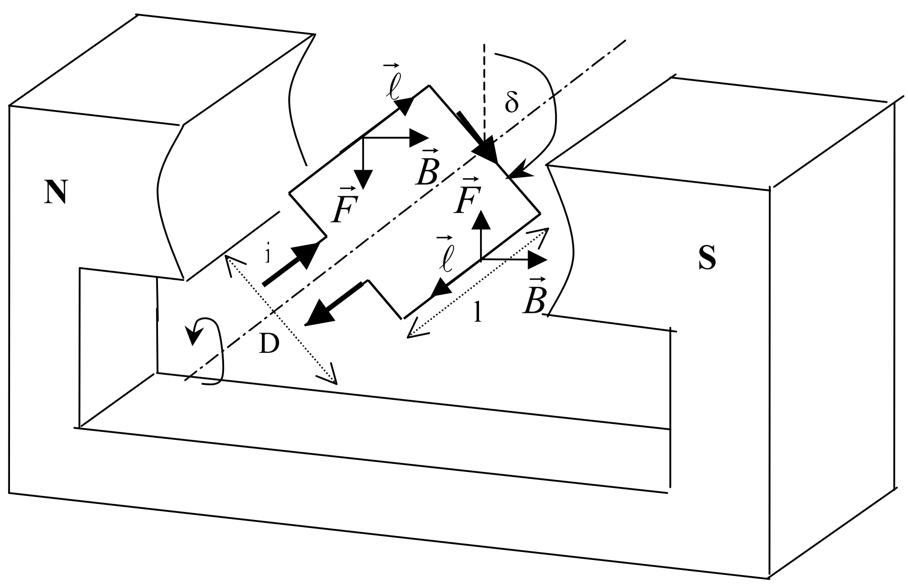


Figura 2.4. Motor elemental.

$$
\begin{aligned}
\vec{T}_m &= 2\vec{F} \times \vec{r} \\
\left|\vec{T}_m\right| &= 2 \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \frac{D}{2} sen(\delta)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.8)}
$$

Las fuerzas sobre los otros lados de la espira son axiales y se anulan entre sí.

Se observa que el torque se anula para δ=0, por lo que la espira tiende a tomar esta posición.

En el caso que exista un torque resistente "T_R" la posición de reposo es para T_m=T_R. A modo de ejemplo se tiene que al colocar un resorte en espiral como carga mecánica en la espira, el ángulo de reposo δ se modifica. El valor final de reposo es función de la corriente circulante con lo cual este circuito puede utilizarse como un amperímetro.

2.1.4. Principios básicos del generador eléctrico.

La ley de Faraday constituye el principio básico de un generador eléctrico: en un conductor o circuito eléctrico que enlaza un flujo magnético variable en el tiempo, se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) dada por:

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Este voltaje o f.e.m. hará circular una corriente por el circuito correspondiente.

La variación de ϕ en el tiempo puede producirse por una corriente variable en el tiempo (efecto de transformador) o una por variación de la geometría del sistema (efecto de generador). Este último caso, es el que interesa, por cuanto la entrada es energía mecánica (necesaria para modificar la geometría) y la salida es energía eléctrica.

Considérese una espira sometida a un campo magnético constante cuyo eje se encuentra girando a velocidad angular "ω", tal como muestra la figura 2.5.

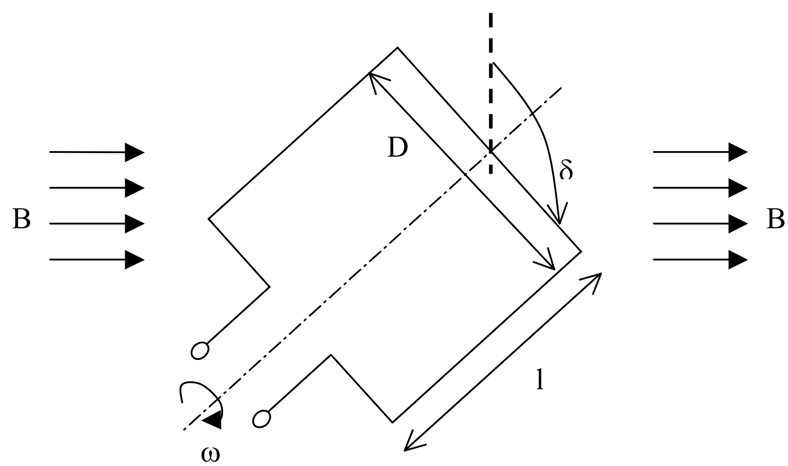


Figura 2.5. F.e.m. inducida en una espira

Considerando $\delta_{(t=0)} = 0$, el flujo enlazado por esta espira es de la forma:

$$\phi(t) = \phi_{máx} \cos(\delta) \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = \left|\vec{B}\right| \cdot \ell \cdot D \cdot \cos(\omega t) \qquad \textbf{(2.10)}$$

Luego, por (2.9), en los terminales de la espira se produce una f.e.m. de la forma:

$$\begin{aligned} e &= E_{máx} \cdot sen(\omega t) \\ E_{máx} &= \left|\vec{B}\right| \cdot \ell \cdot D \cdot \omega \end{aligned} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Es decir, el dispositivo constituye un generador de corriente alterna, cuya frecuencia eléctrica $\omega = 2\pi f$ coincide con la velocidad angular mecánica ω. En este caso, se dice que la frecuencia eléctrica está sincronizada con la velocidad mecánica, por lo cual se denomina usualmente como generador sincrónico.

2.2. CIRCUITOS MAGNETICOS.

2.2.1. Generalidades.

En general se denominara circuito magnético a un conjunto de enrollados alimentados por corrientes, y enlazados magnéticamente entre sí. Para nuestros propósitos, interesara en particular el estudio de circuitos magnéticos que emplean núcleos de materiales ferromagnéticos que tienen la propiedad de ofrecer baja resistencia a la circulación del flujo magnético, permitiendo encausarlo adecuadamente.

Para el estudio de circuitos magnéticos, es necesario definir otra variable fundamental en campos magnéticos: la intensidad de campo magnético, y su relación con la densidad de flujo en materiales no ferromagnéticos y ferromagnéticos.

La intensidad de campo magnético se define como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Donde μ_0 es la permeabilidad magnética del medio.
De acuerdo a lo anterior, al ser μ_0 constante, $\vec{H}$ es proporcional a $\vec{B}$.

La intensidad de campo $\vec{H}$ está relacionada con la corriente eléctrica, o sea con la fuente que origina el campo magnético. Esto se aprecia colocando la expresión (2.3) en función de $\vec{H}$:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i \qquad \textbf{(2.13)}$$

Se emplea como unidad MKS para la intensidad de campo magnético ($\vec{H}$) el [Amp. vuelta/m], y en unidades CGS el [Amp. vuelta/cm] que equivale a 10^2 [Amp. vuelta/m]. A veces se utiliza la unidad [Oersted] equivalente a 79,55 [Amp. vuelta/ m].

Un aumento en el valor de la fuente "*i*", aumenta la intensidad $\vec{H}$ en los diversos puntos del campo magnético, subiendo proporcionalmente la densidad de flujo $\vec{B}$.

Sin embargo, existen ciertos materiales llamados ferromagnéticos (fierro, cobalto, níquel y aleaciones de los mismos), en los cuales un determinado valor de $\vec{H}$ produce un aumento de $\vec{B}$ mucho mayor que $\mu_0 \cdot \vec{H}$.

Esto se debe a que dichos materiales están constituidos por dipolos magnéticos moleculares. Estos dipolos están orientados al azar cuando no hay campo magnético externo aplicado ($\vec{H}$ = 0), sin embargo, al aplicar un campo magnético externo ($\vec{H} \neq 0$) los dipolos se orientan en el sentido del campo, produciendo un campo interno adicional que aumenta notablemente la densidad de flujo total en el interior del material.

Una vez que los dipolos terminan de alinearse con el campo magnético, el aumento en la intensidad de campo $\vec{H}$ produce que la densidad de flujo interna $\vec{B}$ sólo aumente según $\mu_0 \cdot \vec{H}$, en este caso se dice que el material esta saturado. De este modo, $\vec{H}$ y $\vec{B}$ se relacionaran mediante:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad \textbf{(2.14)}$$

Donde la permeabilidad magnética μ es no constante.

En la figura 2.6 se ve la característica B-H típica de un material ferromagnético. Se distingue una zona lineal, donde $|\vec{B}|$ es proporcional a $|\vec{H}|$ y μ es prácticamente constante, un codo de saturación y una zona de saturación, donde $|\vec{B}| = \mu_0 \cdot |\vec{H}|$, por lo cual resulta indeseable trabajar.

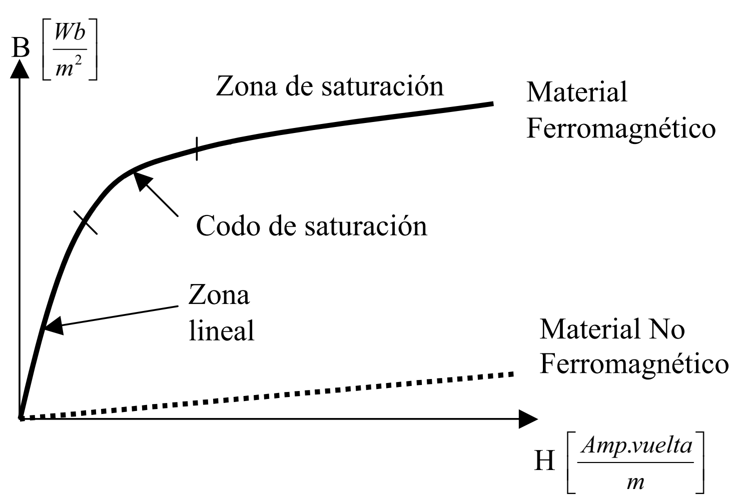


Figura 2.6. Característica B - H.

En esta misma figura se muestra la característica B-H de un material no ferromagnético, apreciándose la notable diferencia entre la pendiente de esta recta con la pendiente μ de la zona lineal de los materiales ferromagnéticos. En general, μ en la zona lineal es del orden de 10^3 veces μ_0.

La propiedad anterior, lleva a la conclusión que ante la presencia de materiales magnéticos las líneas de flujo se cerraran preferentemente siguiendo las trayectorias definidas por dichos materiales. Por ello, el empleo de núcleos ferromagnéticos es la base en la construcción de toda maquina eléctrica, y la fabricación de fierro para usos eléctricos se orienta a lograr altos valores de μ, codos de saturación a $\left|\vec{B}\right|$ elevados (~ 2 Wb/m^2) y bajas perdidas magnéticas, lo que se consigue en gran medida con aleaciones con silicio (fierro silicoso).

2.2.2. Circuito magnético simple.

En general se puede designar como circuito magnético a un conjunto de uno o mas enrollados eléctricos recorridos por corrientes eléctricas, y que están acoplados magnéticamente entre sí. En particular, interesaran aquellos que empleen núcleos ferromagnéticos para mejorar el acoplamiento magnético.

En la figura 2.7 se muestra un circuito magnético muy simple: una bobina ideal (sin perdidas), de N vueltas, recorrida por una corriente "***i***", y ubicada en un núcleo magnético determinado de longitud media "ℓ" y sección transversal uniforme "A".

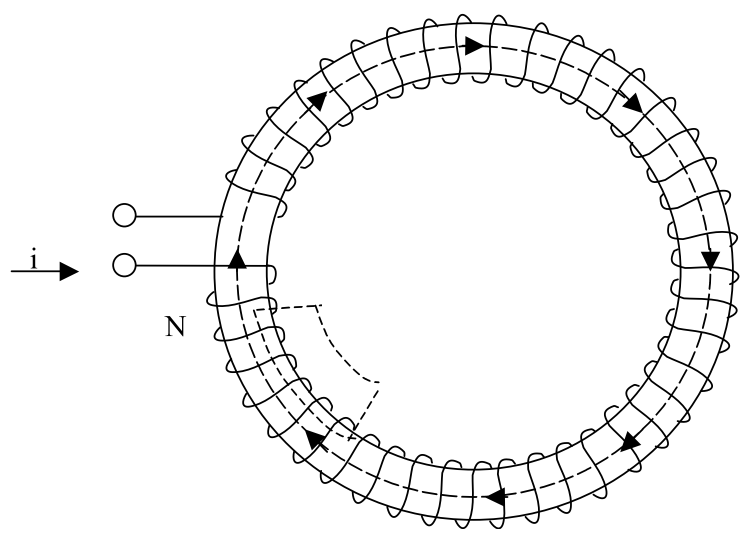


Figura 2.7. Circuito magnético simple

Si se supone que todo el flujo se cierra únicamente por el núcleo (o sea no hay flujos de fuga), $\left|\vec{B}\right|$ y por lo tanto $\left|\vec{H}\right|$ [3], tendrán un valor constante en cualquier punto del núcleo.

[3] En adelante B y H respectivamente

Así, aplicando la ley de Ampere (ecuación (2.13)) a la trayectoria de integración indicada con línea de segmentos en la figura 2.7, se tiene:

$$H\oint d\ell = N\cdot i$$
$$H\cdot \ell = N\cdot i \qquad \textbf{(2.15)}$$

Esta relación permite evaluar H y encontrar el respectivo valor de B en la característica B-H del material. Esto indica la necesidad de contar con este tipo de información al estudiar problemas que incluyan la zona no lineal de la característica B-H.

Cuando el circuito magnético no es tan simple, suele ocurrir que el núcleo, a pesar de constituir una trayectoria cerrada sencilla (sin trayectorias paralelas), está formado por trozos de sección transversal uniforme A_K y longitud ℓ_K, de modo que H será constante dentro de cada trozo. En este caso la integral de la ecuación (2.13) se podrá expresar como una sumatoria:

$$N\cdot i = \sum_K H_k \cdot \ell_K \qquad \textbf{(2.16)}$$

N·i : Se denomina fuente magnética o fuerza magnetomotriz designándose a veces como F = N·i.

$H_k \cdot \ell_K$: Se denominan caídas magnéticas del circuito magnético.

2.2.3. Circuito eléctrico equivalente.

Es posible hacer una analogía entre un circuito magnético como el descrito por la ecuación (2.16) y un circuito eléctrico. Para ello, la fuente magnética N·i puede asimilarse a una fuente de voltaje, y las caídas magnéticas $H_k \cdot \ell_K$ serian caídas de voltaje en el circuito eléctrico. El flujo magnético ϕ tendría su equivalente en la corriente del circuito eléctrico.

Esta analogía es aún mas clara, y presta entonces su real utilidad, cuando los circuitos magnéticos son lineales (es decir formados con núcleos de μ=constante.). En este caso la ecuación (2.16) puede escribirse:

$$N\cdot i = \sum_K \frac{B_K}{\mu_K}\ell_K = \sum_K \frac{\phi \ell_K}{\mu_K A_K} = \phi \cdot \sum_K \frac{\ell_K}{\mu_K A_K} \qquad \textbf{(2.17)}$$

La ecuación equivalente de un circuito eléctrico seria:

$$V = I\cdot \sum_K r_K \qquad \textbf{(2.18)}$$

Siendo "V" la fuente de voltaje, "I" la corriente que circula por el circuito y "r_K" las resistencias en serie que representan las caídas magnéticas $H_k \cdot \ell_K$.

Así, es posible definir en el circuito magnético el equivalente de una resistencia eléctrica, y que en este caso se denomina reluctancia:

$$R = \frac{\ell}{\mu A} \qquad \textbf{(2.19)}$$

El valor de la reluctancia es constante al trabajar dentro de la zona lineal de la característica B-H.

Si comparamos la fórmula (2.19) con la expresión que define la resistencia eléctrica en función de la conductividad, la longitud y la sección del conductor eléctrico (fórmula (2.20)), podemos entonces definir a la reluctancia "R" como un parámetro de "resistencia" al flujo magnético y a la permeabilidad magnética μ como una medida de la "conductividad" del núcleo. De este modo, mientras mayor sea "R", se necesitará un valor mayor de la fuente magnética para establecer determinado flujo.

$$r = \frac{\ell_C}{\sigma \cdot A_C} \qquad \textbf{(2.20)}$$

En la Tabla 2.2. se muestra la equivalencia descrita entre variables magnéticas y eléctricas:

Tabla 2.2. Analogía de variables magnéticas y eléctricas.

Variable magnética		**Variable eléctrica equivalente**	
F = N·i	Fuerza magnetomotriz	V	Voltaje o fuerza electromotriz
ϕ	Flujo magnético	I	Corriente eléctrica
H • l	Caída magnética	ΔV	Caída de voltaje
R	Reluctancia	r	Resistencia eléctrica
μ	Permeabilidad magnética	σ	Conductividad eléctrica.
B	Densidad de flujo	J	Densidad de corriente

La ecuación (2.17) puede escribirse en función de las reluctancias del circuito magnético, como:

$$N \cdot i = \phi \cdot \sum R_K = \phi \cdot R_{eq} \qquad \textbf{(2.21)}$$

Donde R_{eq} es la reluctancia equivalente vista desde la fuente.

En la figura 2.8 se muestra un circuito magnético y su equivalente eléctrico.

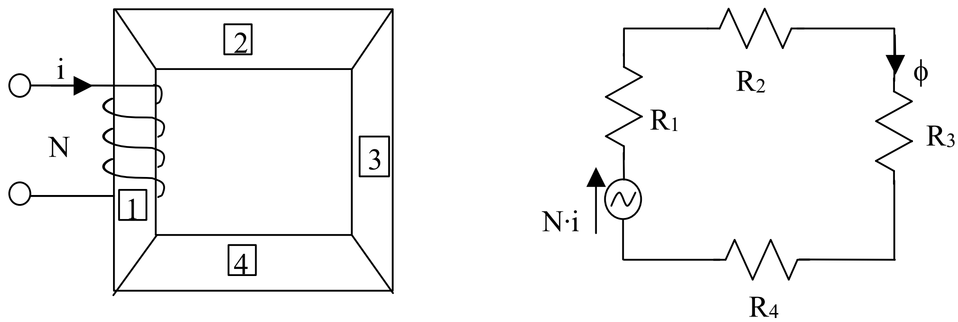


Figura 2.8. Circuito magnético y su equivalente eléctrico

Por otra parte, puede demostrarse que la relación (2.21) es valida en general para circuitos magnéticos lineales con un solo enrollado y con cualquier configuración del núcleo (trayectorias serie y paralelo). En todos estos casos, R_{eq} será la reluctancia equivalente vista desde la fuente en el circuito eléctrico equivalente.

Para circuitos magnéticos lineales con más de una fuente (más de un enrollado), basta ubicarlas adecuadamente y con el sentido correcto en el circuito eléctrico equivalente. La resolución de este circuito entrega información necesaria para evaluar las variables magnéticas ϕ, B y H.

Cuando los circuitos magnéticos no son lineales, en general no conviene trabajar con reluctancias (ya que estos dejan de ser parámetros constantes), y es necesario trabajar con la ley de Ampere propiamente tal y con la característica B-H, para relacionar estas dos variables.

2.2.4. Corriente-variable en el tiempo.

La forma de actuar de los campos magnéticos se deduce de las leyes de Maxwell. En los dispositivos que aquí se estudian, las frecuencias de las variables son tales que permiten despreciar las corrientes de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell (casos cuasi-estáticos). Es decir, los campos variables en el tiempo son los mismos que en condiciones estáticas para un mismo nivel eléctrico, de modo que los circuitos magnéticos se pueden resolver como si fueran estáticos, introduciéndose posteriormente cualquier variación en el tiempo.

Un problema adicional que aparece con corriente alterna, son las perdidas magnéticas. En los núcleos reales existen dos tipos de perdidas:

i) Perdidas de histéresis: son las perdidas producidas por roce molecular cuando las moléculas magnéticas deben orientarse en uno y otro sentido al estar excitadas con un campo magnético alterno en el tiempo (producido por una corriente alterna, no necesariamente sinusoidal).

ii) Perdidas por corrientes parásitas o de Foucault: como los núcleos ferromagnéticos son a la vez buenos conductores eléctricos, un flujo magnético variable en el tiempo, $\phi(t)$, inducirá corrientes parásitas (i_p) que circularan por el núcleo según se muestra en la figura 2.9.(a).

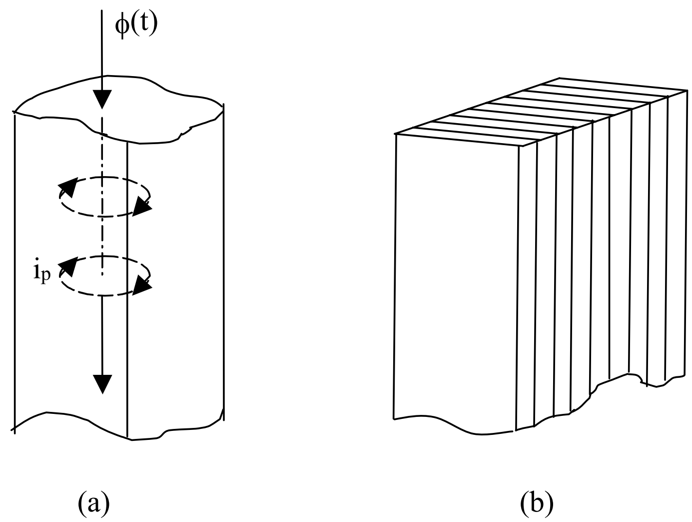


Figura 2.9. Corrientes de Foucault.

Estas corrientes parásitas producirán perdidas de Joule debido a la resistencia eléctrica del fierro ($r_{fierro} \cdot i_p^2$), las que serán mayores mientras mayor sea la trayectoria permitida para la circulación de las corrientes parásitas.

Por esta razón, los núcleos que se emplean con corriente alterna se fabrican laminados, como se muestra en la figura 2.9 (b), de modo de restringir las trayectorias de las corrientes parásitas a cada una de las laminas. Las laminas tienen barniz aislante eléctrico en cada una de sus caras, y sus espesores son del orden de 0,5 [mm]. En el capitulo 3 se encontraran las expresiones analíticas para las perdidas por histéresis y por corrientes de Foucault, demostrándose que estas últimas son proporcionales al cuadrado del espesor de las chapas o laminas.

2.2.5. Inductancias.

Para una bobina o enrollado de un circuito magnético su inductancia propia se define en general como:

$$L = \frac{d\lambda}{di} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Donde λ es el flujo enlazado por las N vueltas de la bobina ($\lambda = N \cdot \phi$)

"L" es la pendiente de la característica λ v/s. "***i***", así, para un circuito simple en que no haya flujos de fuga (ver figura 2.7) se tiene:

$$B = \phi/A \tag{2.23}$$

$$\lambda = N \cdot A \cdot B \tag{2.24}$$

Considerando la ecuación (2.15):

$$i = \frac{\ell}{N} \cdot H \tag{2.25}$$

Se tiene que λ es proporcional a B, e "***i***" es proporcional a H, por lo cual la característica λ-i del núcleo será, en general, semejante a la característica B-H del mismo (figura 2.10).

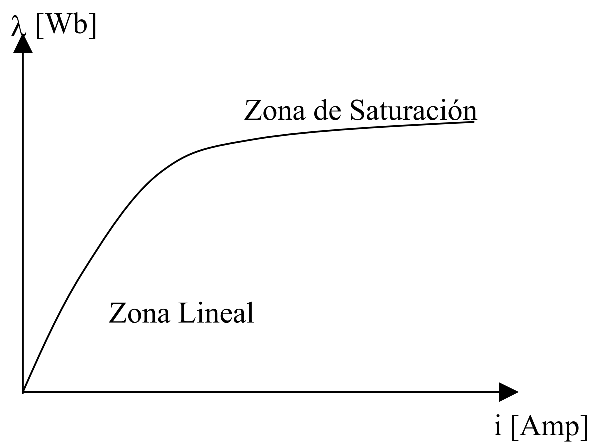


Figura 2.10 Característica λ-i.

En general la inductancia propia no será constante, sino que dependerá del valor de la corriente. En la zona lineal, "L" (que es la pendiente de la curva λ-i) será constante y de valor elevado. En la zona de saturación (altas corrientes), la inductancia decaerá notablemente a valores similares al caso que no hubiera núcleo ferromagnético.

Para la zona lineal, es posible evaluar en forma simple la inductancia:

$$L = \frac{d\lambda}{di} = \frac{\lambda}{i} = \frac{N \cdot \phi}{i} \tag{2.26}$$

De la relación de circuitos magnéticos lineales (2.21) y de (2.26) se obtiene:

$$L = \frac{N^2}{R_{eq}} \tag{2.27}$$

O bien

$$L = N^2 P_{eq} \tag{2.28}$$

Donde $P_{eq} = 1/R_{eq}$ es la permeancia equivalente del circuito magnético, vista desde la bobina.

Cuando los circuitos magnéticos tienen más de una bobina, es posible que cada bobina, aparte de enlazar su propio flujo ϕ_{11} producido por su corriente i_1 enlace parte del flujo producido en una segunda bobina, ϕ_{12}, producido por una corriente i_2 en dicha bobina (figura 2.11).

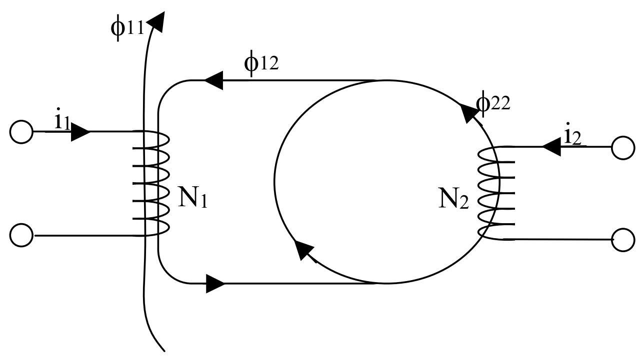


Figura 2.11. Flujos propios y mutuos.

En este caso es posible definir (considerando caso lineal):

- Inductancia propia

$$L_{11} = N_1 \frac{\phi_{11}}{i_1} \tag{2.29}$$

- Inductancia mutua

$$L_{12} = N_1 \frac{\phi_{12}}{i_2} \tag{2.30}$$

Si el circuito magnético lineal tiene “n” bobinas, para la bobina “j” la inductancia propia será de la forma:

$$L_{jj} = N_j \frac{\phi_{jj}}{i_j} \tag{2.31}$$

Y las inductancias mutuas respecto a otra bobina k:

$$L_{jk} = N_j \frac{\phi_{jk}}{i_k} \quad \text{(k=1,2,…,n≠j)} \tag{2.32}$$

Se puede demostrar que, en general, $L_{jk} = L_{kj}$.

La evaluación de inductancias mutuas es similar a la evaluación de inductancias propias, es decir, es necesario resolver el circuito magnético y evaluar ϕ_{jk}.

El voltaje en una bobina "j", supuesta de resistencia nula, esta dado por la relación:

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} L_{jk} \frac{di_k}{dt} \quad ^{(4)} \qquad \textbf{(2.33)}$$

O bien expresado matricialmente para las n bobinas:

$$[v] = [L]\frac{d}{dt}[i] \qquad \textbf{(2.34)}$$

2.2.6. Energía en el campo magnético.

En un circuito magnético simple, donde no haya perdidas ni en los enrollados ni en el núcleo, la energía que entra al sistema a través del circuito eléctrico, sólo puede almacenarse en el núcleo, es decir, en el campo magnético.

Así, haciendo un balance de energía, puede decirse que la energía eléctrica es igual a la energía acumulada en el campo magnético. 0 sea, la energía acumulada en el campo, ε_c, se puede evaluar a través de la energía eléctrica:

$$\varepsilon_c = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\cdot i(t)dt \qquad \textbf{(2.35)}$$

Siendo p(t) la potencia eléctrica instantánea que entra al sistema.

Como $v(t) = d\lambda/dt$, de (2.35) se tiene:

$$\varepsilon_c = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{i}\cdot d\lambda \qquad \textbf{(2.36)}$$

---

(4) Esta relación proviene de la ley de Faraday, y es válida para circuitos magnéticos de geometría fija; en caso contrario, habrá que sumar los términos del tipo $i\frac{dL}{dt}$, según puede deducirse de la ecuación de Maxwell $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \nabla\times\vec{v}\times\vec{B}$, donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico y $\vec{v}$ la velocidad del conductor respecto al campo; al primer sumando se le llama voltaje de transformación, y al segundo de generación.

Luego, ecuación queda representada por el área bajo la curva λ-i, como se indica en la figura 2.12.

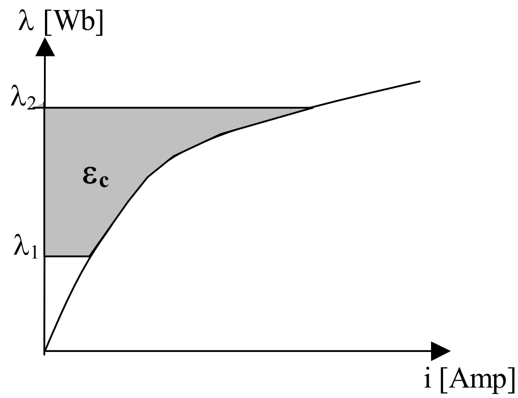


Figura 2.12. Energía en campo magnético

Si λ e "*i*" se expresan en función de B y H, de acuerdo a las expresiones (2.24) y (2.25) la ecuación (2.36) puede escribirse como:

$$\varepsilon_c = \int_{B_1}^{B_2} \mathrm{H} \cdot \mathrm{dB} \qquad \textbf{(2.37)}$$

Como $A \cdot \ell$ representa el volumen del núcleo (espacio ocupado por el campo magnético) puede escribirse la relación:

$$\frac{\varepsilon_c}{Vol} = \int_{B_1}^{B_2} \mathrm{H} \cdot \mathrm{dB} \ \text{[Joule/m}^3\text{]} \qquad \textbf{(2.38)}$$

Es decir, la energía por unidad de volumen acumulada en el campo magnético corresponde al área bajo la curva B-H, según se indica en la figura 2.13.

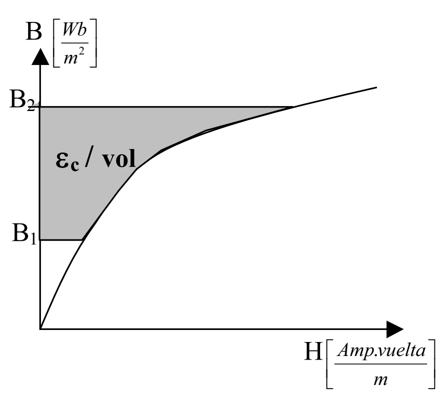


Figura 2.13. Energía por unidad de volumen

Para circuitos magnéticos lineales (donde L y μ son constantes), si se considera que en el instante inicial i = 0, la expresión para la energía acumulada puede escribirse como:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \lambda i = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L} \qquad \textbf{(2.39)}$$

$$\frac{\varepsilon_c}{Vol} = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \qquad \textbf{(2.40)}$$

Si el circuito magnético no tiene pérdidas, al aumentar la corriente de la bobina de 0 a "***i***", entrará una determinada energía ε_c al sistema, la cual se acumulará en el campo magnético, inversamente, si la corriente se reduce de "***i***" a 0, la misma cantidad de energía ε_c se devuelve a la fuente eléctrica.

Sin embargo, si en el núcleo existen pérdidas (histéresis o corrientes parásitas), la cantidad de energía ε_c devuelta a la fuente eléctrica será menor que la energía ε_c entregada inicialmente al campo magnético. Por este motivo, la trayectoria de regreso en el grafico λ-i (o B-H) no es la misma trayectoria inicial, según se aprecia en la figura 2.14 y el área entre ambas curvas representa la energía que se pierde en el núcleo (pérdidas por histéresis y Foucault).

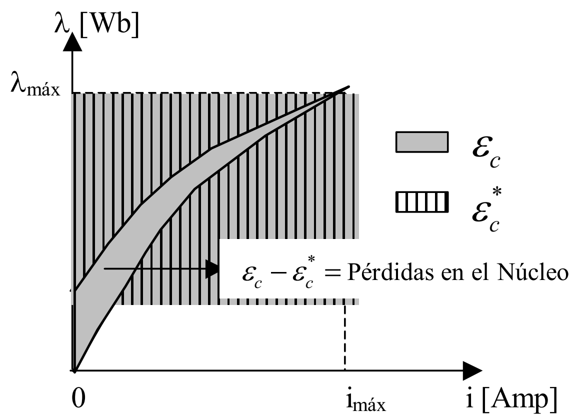


Figura 2.14. Energía perdida en el núcleo

Si la corriente es alterna, y varia entre $i_{máx}$ y - $i_{máx}$, el punto de operación en el grafico λ-i (o B-H) recorrerá una trayectoria denominada ciclo de histéresis. El área de este ciclo representará las perdidas en el núcleo por el ciclo de la corriente (ver figura 2.15).

Si la trayectoria se recorre muy lentamente, de modo que las corrientes parásitas inducidas puedan despreciarse, el área de la curva representara solo las perdidas de energía de histéresis, por ciclo.

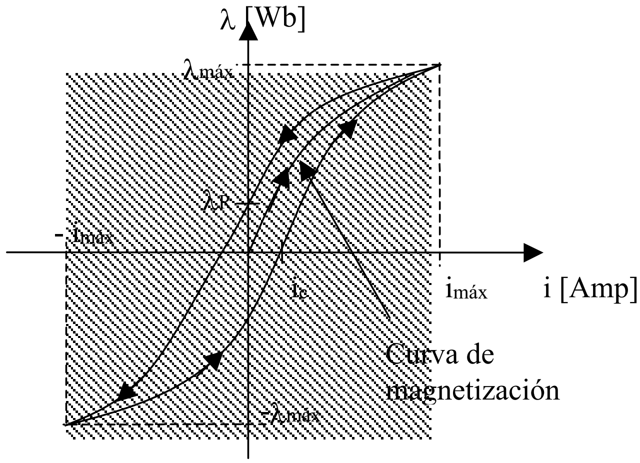


Figura 2.15. Ciclo de histéresis

Como puntos particulares del ciclo de histéresis se pueden destacar la corriente es necesaria para que el flujo sea cero ($N \cdot i_c$ = fuerza magnetomotriz coercitiva) y el enlace de flujo λ_R que persiste en el núcleo a pesar de ser i = 0 (flujo remanente). La trayectoria que pasa por el origen, o curva de magnetización, sólo se tendrá para núcleos magnéticos vírgenes, o núcleos desmagnetizados.

En la práctica, se tratan de fabricar núcleos con bajas perdidas, de modo que los ciclos son relativamente angostos. La información que entregan los fabricantes es la curva de magnetización junto a la denominada curva de perdidas, donde se grafican los Watts/Kg de pérdidas en el núcleo, en función de $B_{máx}$.

2.2.7. Circuitos magnéticos con entrehierro.

A continuación se analiza el caso de circuito magnéticos con entrehierros. Este caso reviste de gran interés puesto que las máquinas eléctricas constituyen necesariamente circuitos de este tipo para permitir el desplazamiento de una parte móvil respecto a una parte fija.

En primer lugar considérese un circuito magnético ideal con un enrollado, el cual posee las siguientes características:

- No hay flujos de fuga por el aire.
- La resistencia eléctrica del enrollado es despreciable.
- Las perdidas en el núcleo son despreciables.
- La permeabilidad μ es constante y su valor tiende a infinito (consecuentemente, el valor de la reluctancia del núcleo tiende a cero, evitando las caídas de potencial magnético).

Al aplicar un voltaje v(t) a la bobina se establece un flujo magnético $\phi(t)$ y por tanto una densidad de flujo $B = \phi/A$ en el núcleo ("A" es la sección transversal del núcleo). Sin embargo, como μ tiende a infinito la intensidad de campo magnético H será siempre igual a cero (ver ecuación (2.14)). Esto fuerza a que la corriente que circula por la bobina sea nula (según fórmula (2.15)), la inductancia propia tienda a infinito (ecuación (2.26)) y por lo tanto la energía acumulada en el campo magnético sea nula ($\varepsilon_c = 0$).

Considérese el mismo circuito magnético anterior al cual se ha agregado un entrehierro según se aprecia en la figura 2.16.

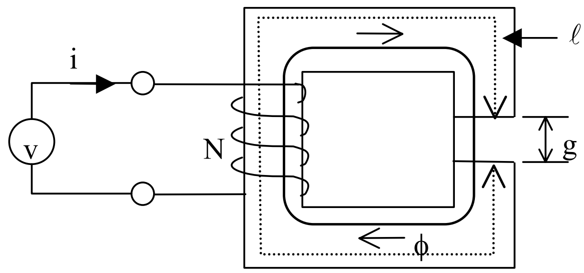


Figura 2.16. Circuito magnético con entrehierro

El circuito magnético es lineal, sin perdidas, el núcleo tiene una longitud media ℓ, una sección transversal "A" uniforme, y un entre hierro de longitud $g \ll \ell$.

Suponiendo que no existe dispersión de flujo magnético en el entrehierro se tiene:

$$B_{eh} = B_{Fe} = B = \frac{\phi}{A}$$
$$N \cdot I = H_{Fe} \cdot \ell + H_{eh} \cdot g \qquad \textbf{(2.41)}$$

Donde:
B_{eh} es la densidad de flujo en el entrehierro
B_{fe} es la densidad de flujo en el fierro
H_{eh} es la intensidad de flujo en el entrehierro
H_{fe} es la intensidad de flujo en el fierro

Si el núcleo es ideal, $H_{Fe} = 0$, con lo cual:

$$N \cdot I \cong H_{eh} \cdot g = \frac{B_g}{\mu_o} \qquad \textbf{(2.42)}$$

Y la energía acumulada en el campo magnético es:

$$\varepsilon_c \cong \frac{1}{2} BH_{eh} \cdot Vol_{eh} \qquad \textbf{(2.43)}$$

Es decir, prácticamente toda la energía se acumula en el entrehierro.

Además, la inductancia queda dada por:

$$L = \frac{N^2}{R_{Fe} + R_{eh}} \qquad \textbf{(2.44)}$$

Pero como $\mu \to \infty$ y consecuentemente $R_{Fe} \to 0$ se tiene:

$$L \cong \frac{N^2}{R_{eh}} = \frac{N^2}{g}\mu_o A \qquad \textbf{(2.45)}$$

O sea, la inductancia propia de la bobina es prácticamente determinada por el entrehierro.

2.3 Problemas Resueltos

1. ¿Qué entiende por Reluctancia de un circuito magnético?
Respuesta:

Es posible hacer una analogía entre un circuito magnético como el descrito por la ecuación $Ni = \sum_K H_k \ell_K$ y un circuito eléctrico. Para ello, la fuente magnética Ni puede asimilarse a una fuente de voltaje, y las caídas magnéticas $H_k \ell_K$ serian caídas de voltaje en el circuito eléctrico. El flujo magnético ϕ tendría su equivalente en la corriente del circuito eléctrico.

Esta analogía es aun mas clara, y presta entonces real utilidad, cuando los circuitos magnéticos son lineales (es decir formados con núcleos de μ=constante.). En este caso la ecuación anterior puede escribirse:

$$NI = \sum_K \frac{B_K}{\mu_K}\ell_K = \sum_K \frac{\phi \ell_K}{\mu_K A_K}$$

Como ϕ es constante en todos los trozos "en serie" del circuito magnético supuesto, puede sacarse fuera de la sumatoria, quedando

$$NI = \phi \sum_K \frac{\ell_K}{\mu_K A_K}$$

La ecuación equivalente de un circuito eléctrico seria:

$$V = I \cdot \sum_K r_K$$

Siendo V el voltaje, I la corriente y r_K las resistencias en serie. Así, es posible definir en el circuito magnético el equivalente de una resistencia eléctrica, y que en este caso se denomina reluctancia:

$$\Re = \frac{\ell}{\mu A}$$

Que será constante al trabajar dentro de la zona lineal de la característica B-H.

2. ¿Cómo varia la permeabilidad de un material ferromagnético ante la fuerza electromotriz?

Respuesta:

La permeabilidad magnética μ es una medida de la "conductividad" del núcleo para la circulación del flujo. Mientras mayor sea $\Re$, se necesitara un valor mayor de la fuente magnética para establecer determinado flujo.

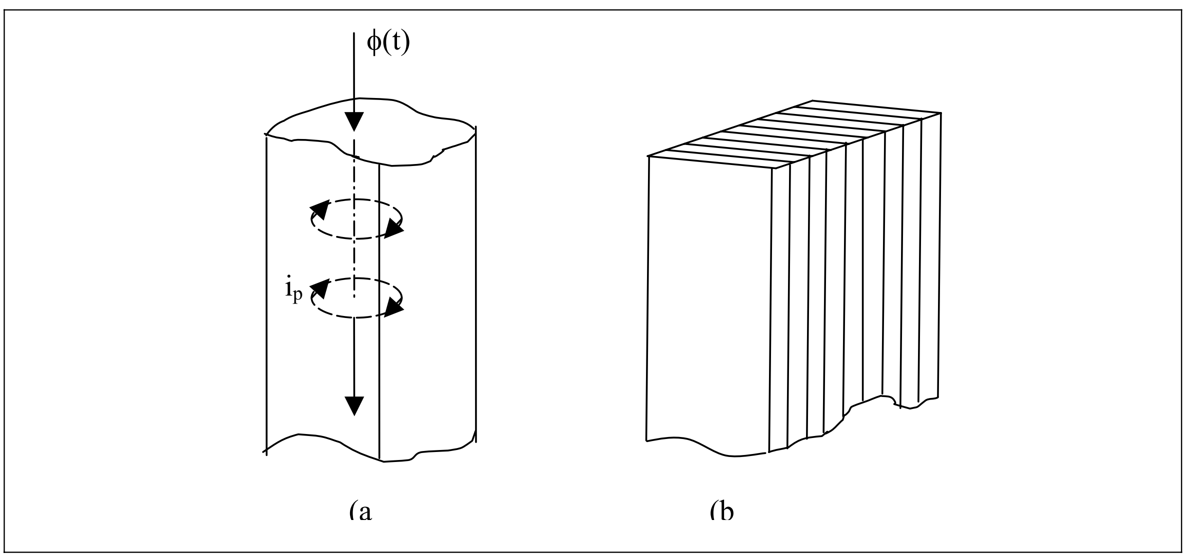
$$F = Ni = \phi \cdot \sum \Re_K = \phi \Re_{eq}$$

$$\Re = \frac{\ell}{\mu A}$$

3. ¿Cómo se atenúa la magnitud de las corrientes parásitas, o de Foucault?

Respuesta:

Como los núcleos ferromagnéticos son a la vez buenos conductores eléctricos, un flujo magnético variable en el tiempo, $\phi(t)$, inducirá corrientes I_p (parásitas) de acuerdo a la ley de Faraday, que circularan por el núcleo según se muestra en la siguiente figura.



Estas corrientes producirán perdidas Joule debido a la resistencia del fierro (R_{fierro} x i_p^2), las que serán mayores mientras mayor sea la trayectoria permitida para la circulación de las corrientes parásitas. Por esta razón, los núcleos que se emplean con corriente alterna se fabrican laminados, como se muestra en la Fig. 2.9 (b), de modo de restringir las trayectorias de las corrientes a cada una de las laminas. Estas laminas tienen barniz aislante eléctrico por una de sus caras, y sus espesores son del orden de 0,5 [mm] o me nos. En el capitulo 3 se encontraran las expresiones analíticas para las perdidas por histéresis y por corrientes de Foucault, demostrándose que estas ultimas son proporcionales al cuadrado del espesor de las chapas o laminas. Como con corriente continua ambos tipos de perdidas son nulas, es posible usar núcleos macizos en ese caso.

4. ¿Qué condiciones son necesarias para que un campo magnético produzca un voltaje en un conductor?

Respuesta:

La ley de Faraday constituye el principio básico de un generador eléctrico: en un conductor o circuito eléctrico que enlaza un flujo magnético variable en el tiempo, se induce una fuerza electromotriz (fem) dada por:

$$e(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Este voltaje o fem hará circular una corriente por el circuito correspondiente. Como el flujo magnético ϕ se relaciona directamente con el campo magnético B, según la siguiente relación:

$$\phi = B \cdot A \;\Rightarrow\; e(t) = -\frac{d(B \cdot A)}{dt}$$

Donde A es el área por donde circula el campo magnético. Luego de la expresión anterior se determinan las siguientes condiciones para producir un voltaje en un conductor:

a. Campo magnético variable en el tiempo y al área A constante o fija.
b. Campo magnético constante y área A variable en el tiempo.
c. Ambos pueden ser variables, campo magnético como área

5. Defina la permeabilidad magnética y muestre como se puede determinar experimentalmente esta cantidad en un medio particular. ¿Qué es la permeabilidad relativa?

Respuesta:

La permeabilidad magnética μ, es una constante escalar para un medio físico particular. Se puede hacer un paralelismo con la conductividad eléctrica, en la cual la permeabilidad representa la facilidad o dificultad de un material en permitir el traspaso (propagación) del campo magnético.

Dada la siguiente relación $B = \mu \cdot H \Rightarrow \mu = \dfrac{B}{H}$ se pude calcular experimentalmente la permeabilidad aplicando una intensidad de campo magnético a un material dado y midiendo la densidad de campo magnético. Esto implica trazar la curva característica de los materiales ferromagnéticos B-H

La permeabilidad de un material se puede considerar como el producto de la permeabilidad del vacío $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \left[H / m \right]$ y la permeabilidad relativa μ_r, la cual varía ampliamente con el medio.

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_o \Rightarrow \mu_r = \frac{\mu}{\mu_o}$$

Por ejemplo para el aire y para la mayoría de los conductores y aisladores eléctricos, $\mu_r = 1$. Para los materiales ferromagnéticos este valor puede ser de cientos o de miles. Por lo tanto, se puede definir la permeabilidad relativa como la permeabilidad de un material respecto a la permeabilidad del vació.

6. ¿Qué es la intensidad del campo magnético? ¿Que lo diferencia de la intensidad del flujo magnético?

Respuesta:

En el estudio de campos magnéticos, aparte del campo magnético (o densidad de flujo) B, se define una segunda variable fundamental denominada intensidad de campo magnético, definida como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Donde μ es la permeabilidad magnética del medio. Es decir H es proporcional a B (al ser μ = constante).

Por otra aprte, la intensidad de campo H esta relacionada con la corriente eléctrica, o sea con la "fuente magnética" que origina el campo, según la Ley de Ampere

$$\oint H \cdot d\ell = i$$

De aquí que se emplea como unidad mks para H [Amp. vuelta/m],y unidad cgs para H [Amp. vuelta/cm] = 102 [Amp. vuelta/m]. A veces se utiliza la unidad [OerstedJ = 79,55 [Amp. vuelta/ m].

Un aumento en el valor de la fuente magnética i, aumenta la intensidad H en los diversos puntos del campo magnético, subiendo proporcionalmente la densidad de flujo B. Sin embargo, existen ciertos materiales llamados ferromagnéticos (fierro, cobalto, níquel y aleaciones de los mismos), en los cuales un determinado valor de H produce un aumento de B mucho mayor que μ•H. Esto se debe a que dichos materiales están constituidos por dipolos magnéticos moleculares, orientados al azar cuando no hay campo magnético externo aplicado (H = 0). Ante la presencia de un campo magnético externo (H ≠ 0), los dipolos se orientan en el sentido del campo, produciendo un campo interno adicional que aumenta notablemente la densidad de flujo total en el interior del material.

La diferencia principal entre las dos variables (B y H) esta en que la intensidad de campo magnético es independiente de las propiedades de los materiales empleados en la construcción de los circuitos magnéticos.

7. ¿Qué es la fuerza magnetomotriz? ¿Qué lo diferencia de la fuerza electromotriz? ¿En que se parecen ambas?
Respuesta:

Dada la siguiente ecuación:

$$Ni = \sum_K H_k \ell_K$$

Es posible hacer una analogía entre un circuito magnético como el descrito por la ecuación anterior y un circuito eléctrico. Para ello, la fuente magnética Ni puede asimilarse a una fuente de voltaje, y las caídas magnéticas $H_k \ell_K$ serian caídas de voltaje en el circuito eléctrico. El flujo magnético ϕ tendría su equivalente en la corriente del circuito eléctrico.

Luego a esta fuente magnética se de denomina Fuerza Magnetomotriz (**fmm**), la cual esta directamente relacionada con la intensidad de campo magnético. También se puede relacionar con la corriente que pasa por la(s) espera(s) de una bobina y con l numero de estas.

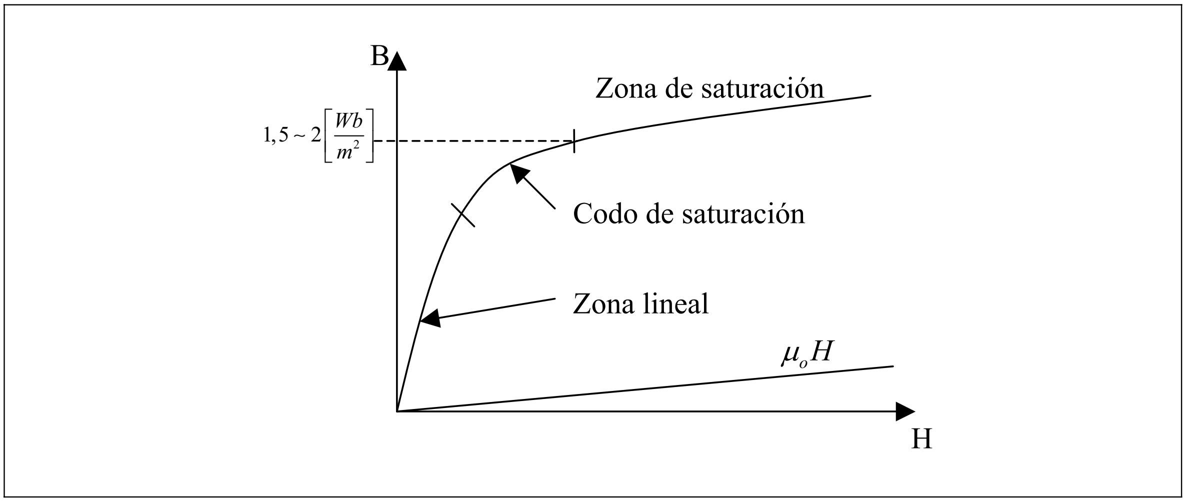
$$F = Ni = fmm$$

La principal diferencia es que la **fmm** es generada por campos magnéticos, en cambio, la fuerza electromotriz es generada por campos eléctricos.

8. ¿Qué entiende por saturación de un material ferromagnético?
Respuesta:

En los materiales llamados ferromagnéticos (fierro, cobalto, níquel y aleaciones de los mismos), en los cuales un determinado valor de H produce un aumento de B mucho mayor que μ_o•H. Esto se debe a que dichos materiales están constituidos por dipolos magnéticos moleculares, orientados al azar cuando no hay campo magnético externo aplicado (H = 0). Ante la presencia de un campo magnético externo (H ≠ 0), los dipolos se orientan en el sentido del campo, produciendo un campo interno adicional que aumenta notablemente la densidad de flujo total en el interior del material.

No obstante, el aumento de B en estos materiales no es proporcional con H, ya que mientras mas aumenta H, es menor el aumento de B pues la gran mayoría de las moléculas se habrán alineado con el campo externo. Cuando todas las moléculas ya estén orientadas (H elevado), por mas que aumente H, la densidad de flujo interna no aumentara, y B total solo aumentara según μ_o•H; se dice que el material esta saturado.



9. **¿Cuáles la relación numérica entre Tesla y Weber/m^2? ¿Entre Gauss y Weber/m^2? ¿Entre Tesla y Gauss?**

Respuesta:

	B
Sistema cgs Sistema mks	[líneas/cm^2] = [Gauss] [Wb/m^2] = [Tesla]
Equivalencias	1 [Wb/m^2] = 10^4 [Gauss] = 10 [KGauss]