

Capítulo 1

Propagación de Ondas Planas

1.1. La ecuación de Onda

Se deriva la ecuación de onda considerando un medio lineal, isotrópico y homogéneo en que se asume además que no existen fuentes primarias, es decir: $\rho = 0$ y las corrientes existentes son de conducción: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Aplicando rotor a la ecuación 1.1 y sustituyendo la ecuación 1.4, se obtiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

De manera análoga, se toma rotor de la ecuación 1.4 y se sustituye la ecuación 1.1, obteniendo:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

Recordando la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.7)$$

Donde $\nabla^2 \mathbf{A}$ es el vector laplaciano, que se define como:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z} \quad (1.8)$$

en coordenadas cartesianas. Considerando que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ y reemplazando en las ecuaciones 1.5 y 1.6 se obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

Estas son ecuaciones de onda vectoriales, en que las variables dependientes, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$, son vectores tridimensionales. Si se considera una región en que no existen corrientes de conducción, las ecuaciones 1.9 y 1.10 serán homogéneas, en que los términos independientes desaparecen.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.12)$$

Puede verse que estas ecuaciones están desacopladas, es decir, en cada una de ellas sólo aparece una variable. Esto significa que pueden estudiarse sus soluciones por separado. Sin pérdida de generalidad, se desarrollará la ecuación 1.11. Se realizarán dos hipótesis simplificatorias adicionales, que consiste en asumir las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E} = 0 \quad (1.13)$$

y que el campo eléctrico es de la forma:

$$\mathbf{E} = E_x \hat{x} \quad (1.14)$$

Las condiciones recién presentadas llevan a un tipo de solución conocida como *onda plana uniforme*. La ecuación de onda, 1.11 es simplificada a:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.15)$$

Esta es la *ecuación de onda clásica*, que admite como soluciones todas las funciones diferenciables de la forma:

$$f(z, t) = g(z - vt) \quad (1.16)$$

en que el término v tiene dimensiones de velocidad y se define como:

$$v = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad (1.17)$$

Las soluciones representan ondas que se propagan en la dirección z con velocidad v . En el vacío, $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3 \times 10^8 [m/s]$. Asimismo, las funciones de la forma

$$f(z, t) = h(z + vt) \quad (1.18)$$

también son soluciones, y representan ondas propagándose en la dirección $-z$. La solución general de la ecuación de onda puede expresarse como sigue:

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) \quad (1.19)$$

y por lo tanto el campo eléctrico obedece a la expresión:

$$\mathbf{E} = [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{x} \quad (1.20)$$

La ecuación 1.19 se conoce como solución de d'Alembert y es una solución formal. Las expresiones de f_1 y f_2 dependerán de las condiciones iniciales y de borde. El campo magnético $\mathbf{H}$ responde a una ecuación de la misma forma que $\mathbf{E}$ y por lo tanto, su solución general debe tener la misma forma presentada en la ecuación 1.19. Sin embargo por la ligazón existente a partir de las ecuaciones de Maxwell, $\mathbf{H}$ no es independiente de $\mathbf{E}$. Considérese la ecuación 1.1 vista al comienzo. Sustituyendo 1.20 en 1.1:

$$[f'_1(z - vt) + f'_2(z + vt)] \hat{y} = \mu \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (1.21)$$

Integrando respecto del tiempo se obtiene la expresión general para el campo magnético:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu v} [f'_1(z - vt) + f'_2(z + vt)] \hat{y} \quad (1.22)$$

El producto μv tiene unidades de impedancia; recibe el nombre de *impedancia intrínseca del medio* y se denota por η . Recordando la expresión 1.17, η puede expresarse como:

$$\eta = \mu \cdot v \quad (1.23)$$

$$= \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (1.24)$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (1.25)$$

1.2. Ondas planas uniformes en régimen sinusoidal permanente

Pese a que no son mas que un caso particular al análisis desarrollado previamente, las ondas planas en régimen sinusoidal permanente son de una gran importancia práctica.

En régimen sinusoidal permanente, los campos tienen una dependencia temporal de la forma $\cos(\omega t + \phi)$, donde ω tiene unidades de $[rad/seg]$. De modo que, volviendo a la solución presentada en la ecuación 1.19, se ve que g y h son:

$$g(z - vt) = A_1 \cos \left[\frac{\omega}{v} (vt - z) + \phi_1 \right] = A_1 \cos \left[\omega t - \frac{w}{v} z + \phi_1 \right] \quad (1.26)$$

$$h(z + vt) = A_2 \cos \left[\frac{\omega}{v} (vt + z) + \phi_2 \right] = A_2 \cos \left[\omega t + \frac{w}{v} z + \phi_2 \right] \quad (1.27)$$

Se define a la cantidad $\frac{\omega}{v}$ como el número de onda k

$$k \equiv \frac{\omega}{v} \quad (1.28)$$

y por lo tanto las ecuaciones 1.26 y 1.27, en el dominio temporal, son:

$$g(z - vt) = A_1 \cos [\omega t - kz + \phi_1] \quad (1.29)$$

$$h(z + vt) = A_2 \cos [\omega t + kz + \phi_1] \quad (1.30)$$

Considerando la ecuación 1.11 referida a un campo fasor, se obtiene:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \mu \epsilon \omega^2 = 0 \quad (1.31)$$

De donde puede deducirse que el número de onda, definido previamente, tiene la forma:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (1.32)$$

Y por ende, las ecuaciones 1.11 y 1.12 pueden escribirse como:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.33)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.34)$$

Fasorialmente, la ecuación 1.33, tiene solución de la forma:

$$\dot{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.35)$$

Donde:

- E_0 es un vector complejo
- $\vec{r}$ es un vector de posición: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
- $\vec{k}$ es el *vector de propagación*. El módulo de este vector es el número de onda, k .

Por lo tanto, en régimen permanente sinusoidal, la ecuación 1.11 admite como solución una onda plana que se propaga en $\hat{k}$, vector unitario que viene dado de $\vec{k} = k\hat{k}$. Es importante notar que el mismo análisis presentado para $\dot{\mathbf{E}}$ puede ser hecho para $\dot{\mathbf{H}}$.

Si bien la solución presentada antes satisface la ecuación presentada, se requiere que este campo provenga de una zona sin fuentes de carga. Esto lleva a que la solución presentada tenga que satisfacer además:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.36)$$

Que puede reescribirse como:

$$\nabla \cdot (\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = \quad (1.37)$$

$$\nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \dot{\mathbf{E}}_0 = \quad (1.38)$$

$$-j\vec{k} \cdot e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \dot{\mathbf{E}}_0 = 0 \quad (1.39)$$

Lo que lleva a que deba cumplirse:

$$\hat{k} \cdot \dot{\mathbf{E}}_0 = 0 \quad (1.40)$$

En lo que respecta al campo magnético, $\dot{\mathbf{H}}$, puede ser obtenido a partir de la expresión obtenida previamente para el campo eléctrico. En efecto, de la ley de Faraday:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \quad (1.41)$$

y por lo tanto

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \dot{\mathbf{E}} \quad (1.42)$$

Sustituyendo 1.35 y recordando que el rotor del producto de un escalar y un vector es:

$$\nabla \times (a\vec{B}) = \nabla a \times \vec{B} + a\nabla \times \vec{B} \quad (1.43)$$

Se obtiene:

$$\dot{\mathbf{H}}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu} \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \times \dot{\mathbf{E}}_0 \quad (1.44)$$

Pero $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{H}}(\vec{r}) = \frac{\vec{k}}{\omega\mu} \times \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (1.45)$$

Como $\vec{k} = k\hat{k} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{k}$ y $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

$$\dot{\mathbf{H}}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (1.46)$$

$$= \frac{\hat{k}}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}} \quad (1.47)$$

De este modo, conociendo el campo magnético de una onda plana, puede determinarse su campo eléctrico, y viceversa.

- **Frente de Onda** Es el lugar geométrico que forman los puntos en que la fase del campo se mantiene constante, siendo la fase el argumento de la función seno o coseno de la expresión instantánea del campo. Esta condición puede escribirse como:

$$\theta = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi = \text{constante} \quad (1.48)$$

En la expresión anterior, el tiempo y la fase son constantes, de modo que la condición de frente de onda es:

$$\vec{k}\vec{r} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} \quad (1.49)$$

$$= cte \quad (1.50)$$

Esta es la ecuación de un plano, y es la razón de porqué estas ondas son denominadas *planas*. Que sean uniformes dice relación con que sobre un frente de onda, el campo no varía de un punto a otro.

- **Velocidad de fase** Representa la velocidad a la que un observador debe desplazarse en la dirección de propagación de la onda, $\hat{k}$, para ver la misma fase. Derivando con respecto al tiempo la ecuación 1.48, se tiene:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \omega - k\frac{dr}{dz} \quad (1.51)$$

$$= 0 \quad (1.52)$$

De donde se obtiene que la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{dr}{dz} = \frac{\omega}{k} \quad (1.53)$$

La ecuación anterior muestra que los frentes de onda perpendiculares a k se propagan con velocidad v_p .

Resumen

Los campos eléctrico y magnético para una onda plana uniforme propagándose en la dirección y sentido indicado por $\vec{k}$, son:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-j\vec{k}\vec{r}} \quad (1.54)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 e^{-j\vec{k}\vec{r}} \quad (1.55)$$

En que $\vec{k} = k\hat{k}$ y $\dot{\mathbf{E}}_0, \dot{\mathbf{H}}_0$ son fasores, que cumplen

$$\dot{\mathbf{H}}_0 = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}}_0 \quad (1.56)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_0 = \eta \dot{\mathbf{H}}_0 \times \hat{k} \quad (1.57)$$

$$\hat{k} \cdot \dot{\mathbf{E}}_0 = \hat{k} \cdot \dot{\mathbf{H}}_0 = 0 \quad (1.58)$$

Se puede ver que $\dot{\mathbf{E}}_0, \dot{\mathbf{H}}_0$ y $\vec{k}$ son vectores ortogonales.

1.3. Flujo de Potencia

Se define la densidad de flujo de potencia instantáneo asociado a un campo electromagnético como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.59)$$

Donde los campos instantáneos se obtienen a partir de los vectores fasores como:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \Re \left[\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right] \quad (1.60)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t} \right) \quad (1.61)$$

$$\mathbf{H}(\vec{r}, t) = \Re \left[\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} \right] \quad (1.62)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{H}}^* e^{-j\omega t} \right) \quad (1.63)$$

Realizando el producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ con las expresiones anteriores:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4} \left(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{2j\omega t} + \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{E}}^* \times \dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{E}}^* \times \dot{\mathbf{H}}^* e^{-2j\omega t} \right) \quad (1.64)$$

Pero

$$\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{E}}^* \times \dot{\mathbf{H}} = 2\Re \left[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \right] \quad (1.65)$$

y

$$\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{2j\omega t} + \dot{\mathbf{E}}^* \times \dot{\mathbf{H}}^* e^{-2j\omega t} = 2\Re \dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{2j\omega t} \quad (1.66)$$

Por lo tanto 1.64 queda:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \Re \left[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \right] + \frac{1}{2} \Re \left[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{2j\omega t} \right] \quad (1.67)$$

El segundo término es periódico en el tiempo y por lo tanto, su contribución a la densidad de potencia media, dada por:

$$\dot{\mathbf{P}}(\vec{r}) = \langle \mathbf{P}(\vec{r}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathbf{P}(\vec{r}, t) dt \quad (1.68)$$

es cero. Luego, la densidad de potencia media es:

$$\dot{\mathbf{P}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \Re \left[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \right] \quad (1.69)$$

expresión cuyas unidades son $[W/m^2]$.

La expresión antes encontrada puede ser expresada alternativamente teniendo en cuenta las relaciones entre los campos eléctrico y magnético:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}} \quad (1.70)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \eta \dot{\mathbf{H}} \times \hat{k} \quad (1.71)$$

De este modo:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \Re \left(\dot{\mathbf{E}} \times \left(\frac{\hat{k}}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}}^* \right) \right) \quad (1.72)$$

Utilizando la identidad:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1.73)$$

y el hecho de que $\hat{k} \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0$, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2\eta} \Re \left[\hat{k} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*) \right] \quad (1.74)$$

El producto $\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* = \left| \dot{\mathbf{E}} \right|^2$ corresponde a la magnitud de $\dot{\mathbf{E}}$ y es real. De modo que

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2\eta} \left| \dot{\mathbf{E}}_0 \right|^2 \hat{k} \quad (1.75)$$

De manera alternativa, expresando el campo eléctrico $\dot{\mathbf{E}}$, como función de $\dot{\mathbf{H}}$, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \Re \left[\left(\eta \dot{\mathbf{H}} \times \hat{k} \right) \times \dot{\mathbf{H}}^* \right] \quad (1.76)$$

Manipulando la expresión se obtiene:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \eta \left| \dot{\mathbf{H}}_0 \right|^2 \hat{k} \quad (1.77)$$

1.4. Polarización de las ondas planas uniformes en régimen sinusoidal permanente

A la trayectoria que describe la punta del campo instantáneo se le llama *polarización*.

Del hecho que $\hat{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\hat{k} \cdot \mathbf{H} = 0$, resulta apropiado utilizar una base ortonormal constituida por dos vectores, $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ y $\hat{k}$, que cumplan:

$$\hat{k} \cdot \hat{e}_1 = 0 \quad (1.78)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{e}_2 = 0 \quad (1.79)$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \quad (1.80)$$

y que conformen un triedro trirrectangular positivo:

$$\hat{k} \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \quad (1.81)$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k} \quad (1.82)$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{k} = \hat{e}_1 \quad (1.83)$$

Al tener $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ siempre perpendicular a la dirección de propagación, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ solo tendrán componentes en 2 direcciones, dadas por los vectores de la base formada, base que tiene un grado de libertad; en efecto, si por ejemplo se fija $\hat{e}_1$, y dada la condición de perpendicularidad respecto a $\hat{k}$, $\hat{e}_2$ queda determinado por $\hat{e}_2 = \hat{k} \times \hat{e}_1$.

La evidente ventaja de definir esta base es que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ tienen componentes sólo en $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$. Así por ejemplo, podrá tenerse un campo eléctrico $\mathbf{E}_A$ definido como:

$$\mathbf{E}_A(\vec{r}, t) = E_{A1} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_1) \hat{e}_1 + E_{A2} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_2) \hat{e}_2 \quad (1.84)$$

Se sabe que la parametrización de una elipse en coordenadas cartesianas queda definida como:

$$x = x_0 \cos(t + \phi_x)$$

$$y = y_0 \cos(t + \phi_y)$$

o, lo que es equivalente, como el recorrido que realiza el vector $\vec{e}$, que recorre distintos puntos a medida que varía t :

$$\vec{e} = x_0 \cos(t + \phi_x) \hat{x} + y_0 \cos(t + \phi_y) \hat{y} \quad (1.85)$$

Se puede hacer un parangón entre la expresión anterior y el campo eléctrico presentado en 1.84, distinguiendo:

$$\begin{aligned}
x_0 &\Leftrightarrow E_{A1} \\
y_0 &\Leftrightarrow E_{A2} \\
t &\Leftrightarrow \omega t \\
\phi_x &\Leftrightarrow -\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_1 \\
\phi_y &\Leftrightarrow -\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_2 \\
\hat{x} &\Leftrightarrow \hat{e}_1 \\
\hat{y} &\Leftrightarrow \hat{e}_2
\end{aligned}$$

Así, se ve que $\mathbf{E}_A$ describe una elipse en el plano formado por $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$.
El campo eléctrico descrito en 1.84 puede escribirse fasorialmente como:

$$\dot{\mathbf{E}}_A(\vec{r}) = E_{A1}e^{j\phi_1 - \vec{k} \cdot \vec{r}}\hat{e}_1 + E_{A2}e^{j\phi_2 - \vec{k} \cdot \vec{r}}\hat{e}_2 \quad (1.86)$$

$$= [E_{A1}e^{j\phi_1}\hat{e}_1 + E_{A2}e^{j\phi_2}\hat{e}_2] e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.87)$$

Se definen 2 relaciones:

$$p = \frac{E_{A2}}{E_{A1}} \quad (1.88)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (1.89)$$

Si se factoriza 1.86 por $E_{A1}e^{j\phi_1}$, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{E}}_A = E_{A1}e^{j\phi_1} \left(\hat{e}_1 + \frac{E_{A2}}{E_{A1}}e^{j(\phi_2 - \phi_1)}\hat{e}_2 \right) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.90)$$

definiendo $C = E_{A1}e^{j\phi_1}$ y reemplazando los parámetros definidos previamente:

$$\dot{\mathbf{E}}_A = C (\hat{e}_1 + pe^{j\Delta\phi}\hat{e}_2) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.91)$$

De esta expresión, y recordando que $\dot{\mathbf{H}} = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}}$ se puede obtener directamente el campo magnético:

$$\dot{\mathbf{H}}_A = \frac{C}{\eta} (\hat{e}_2 - pe^{j\Delta\phi}\hat{e}_1) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.92)$$

Lo relevante que se puede observar de estas expresiones es que la polarización está determinada, en el caso del campo eléctrico, por $\hat{e}_1 + pe^{j\Delta\phi}\hat{e}_2$ y para el campo magnético por $\hat{e}_2 - pe^{j\Delta\phi}\hat{e}_1$. En definitiva, identificando p y $\Delta\phi$ se puede describir la polarización de los campos.

1.4.1. Características de la elipse de polarización

- **Orientación:** Es el ángulo que el eje mayor de la elipse forma con una dirección de referencia, por ejemplo $\hat{e}_1$. En tal caso, utilizando los parámetros definidos previamente, la orientación se define como:

$$\beta = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 \cos(\Delta\phi)}{\frac{1}{p} - p} \right) \quad (1.93)$$

De la forma que adoptan los campos eléctricos y magnéticos, se ve que la elipse que describe $\dot{\mathbf{H}}$ está girada 90° respecto a la de $\dot{\mathbf{E}}$. Esto pues $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ son siempre perpendiculares.

- **Relación Axial:** Es el cociente entre los ejes mayor y menor de la elipse.

$$R = \frac{|\dot{\mathbf{E}}_{max}|}{|\dot{\mathbf{E}}_{min}|} = \frac{|\dot{\mathbf{H}}_{max}|}{|\dot{\mathbf{H}}_{min}|} = \left| \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\sin \Delta\phi}{\frac{1}{p} + p} \right)}}{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\sin \Delta\phi}{\frac{1}{p} + p} \right)}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (1.94)$$

- **Sentido de giro:** Para determinar el sentido de giro, se estudia el signo de la derivada temporal del ángulo δ , que corresponde al ángulo que forma el campo con una dirección de referencia arbitraria, por ejemplo $\hat{e}_1$. De este modo, si $\frac{d\delta}{dt} \geq 0$, el sentido de giro será antihorario. Por el contrario, si $\frac{d\delta}{dt} \leq 0$, el sentido de giro será horario. Como este análisis en general resulta complejo, es conveniente determinar el signo de la derivada temporal de la tangente de este ángulo, que geoméricamente puede verse que queda determinado, en función de los parámetros conocidos del campo:

$$tg\delta = \frac{E_{A2} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_2)}{E_{A1} \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_1} \quad (1.95)$$

Asimismo, como la derivada temporal de la tangente es $\frac{1}{\cos^2 \delta} \frac{d\delta}{dt}$, y $\cos^2 \delta \geq 0$, entonces el signo de $\frac{d\delta}{dt}$ es el mismo de $\frac{dtg\delta}{dt}$. Por lo tanto, derivando la expresión correspondiente a $tg\delta$ se obtiene:

$$\frac{dtg\delta}{dt} = -p\omega \frac{\sin \Delta\phi}{E_{A1} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_1)} \quad (1.96)$$

Es directo ver que el signo de esta expresión depende solamente de $\sin \Delta\phi$ y por lo tanto de ϕ . Se tienen los siguientes casos:

- $-\pi \leq \Delta\phi \leq 0$: En este caso, $\frac{d\delta}{dt} \geq 0$. Por lo tanto el sentido de giro será antihorario
- $0 \leq \Delta\phi \leq \pi$: Paralelamente, $\frac{d\delta}{dt} \leq 0$ y por ende, la polarización será horaria.

1.4.2. Casos particulares de polarización: lineal y circular

Polarización lineal

Existe cuando se dan las siguientes condiciones:

$$p = 0, p = \infty \text{ o} \quad (1.97)$$

$$\Delta\phi = 0, \Delta\phi = \pm\pi \quad (1.98)$$

Si $p = 0$, $\dot{\mathbf{E}}_A = E_{A1}e^{j\Delta\phi_1}\hat{e}_1 = C\hat{e}_1$, y la elipse será un segmento de largo $2E_{A1}$ en la dirección de $\hat{e}_1$. Análogamente, si $p = \infty$, $E_A = C\hat{e}_2$ y la elipse será un segmento en la dirección de $\hat{e}_2$.

Si $\Delta\phi = 0$ ó $\Delta\phi = \pm\pi$, se tendrá $E_A = C(\hat{e}_1 \pm \hat{e}_2)$. Por construcción, $\hat{e}_1 \pm \hat{e}_2$ es un vector perpendicular a la dirección de propagación. En este caso, la elipse de polarización será un segmento en la dirección de dicho vector.

Polarización circular:

Se da cuando $p = 1$ y $\Delta\phi = \pm\pi/2$. En efecto, la relación axial, R , es 1 y por lo tanto sus 2 ejes son iguales. Sin embargo, hay que distinguir entre 2 casos:

- Si $\Delta\phi = \pi/2$, el campo eléctrico viene dado por

$$\dot{\mathbf{E}}_A = C(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) \quad (1.99)$$

en este caso, se dice que la polarización es antihoraria o a izquierdas.

- Por otro lado, si $\Delta\phi = -\pi/2$, el campo eléctrico viene dado por

$$\dot{\mathbf{E}}_A = C(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) \quad (1.100)$$

en este caso, se dice que la polarización es horaria o a derechas.

Capítulo 2

Propagación de Ondas Planas Uniformes en medios con pérdidas

Hasta ahora, se ha supuesto que los medios en que las ondas electromagnéticas se propagan no presentan pérdidas, es decir, no existe una transferencia de energía de la onda al medio en el proceso de propagación.

Hasta el momento, se ha establecido una relación lineal entre los campos instantáneos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ y entre $\mathbf{B}$ con $\mathbf{H}$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.2)$$

Sin embargo para campos en régimen permanente sinusoidal, se establece una relación mas general en que ϵ es una magnitud compleja:

$$\epsilon = \epsilon'_a - j\epsilon''_a \quad (2.3)$$

Donde tanto ϵ' como ϵ'' son magnitudes positivas. Razonando de manera similar se puede determinar que la relación entre $\dot{\mathbf{B}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$, μ , puede ser compleja.

$$\mu = \mu' - \mu'' \quad (2.4)$$

En que μ' y μ'' son positivas.

La consecuencia física de estas permitividad y permeabilidad complejas es que exista un desfase entre $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{D}}$ y entre $\dot{\mathbf{B}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$, respectivamente. Este desfase condiciona que en la interacción entre el medio y el campo, este último entrega energía, señalándose entonces que *el medio presenta pérdidas*.

Otra forma en que se manifiestan pérdidas, y por lo tanto una contribución a la parte imaginaria de la permitividad eléctrica es la conductividad del medio

en que el campo se propaga, σ . De la ley de Ampere en régimen sinusoidal permanente, se tiene que:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \quad (2.5)$$

Si la conductividad del medio es σ y de valor finito, el campo eléctrico y la densidad de corriente se relacionan mediante la *ley de Ohm*: $\dot{\mathbf{J}} = \sigma\dot{\mathbf{E}}$. Sustituyendo esta relación en la ley de Ampere, recordando que $\epsilon = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$ y tomando factor común $j\omega$, se llega a que:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega \left(\epsilon'_a - j \frac{\sigma + \omega\epsilon''_a}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} \quad (2.6)$$

Si se definen:

$$\epsilon' = \epsilon'_a \quad (2.7)$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} + \epsilon''_a \quad (2.8)$$

La ley de Ampere queda:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega (\epsilon' - j\epsilon'') \dot{\mathbf{E}} \quad (2.9)$$

2.1. Ondas Planas Uniformes en medios con pérdidas

El hecho de que la permitividad y permeabilidad, ϵ y μ respectivamente, tomen valores complejos no altera la forma de las ecuaciones de maxwell, considerando una región sin fuentes independientes

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \quad (2.13)$$

ni las ecuaciones que describen los campos en ondas planas uniformes descritas previamente:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.14)$$

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}}_0 e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.15)$$

Sin pérdida de generalidad, se considerará una onda plana propagándose en la dirección $\hat{z}$, de modo tal que $\mathbf{k} = k\hat{z}$. Por simplicidad, las pérdidas del medio

serán representadas sólo mediante una permitividad eléctrica compleja. En las actuales condiciones, el número de onda

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.16)$$

será una cantidad compleja. De este modo, se expresa k como:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \beta - j\alpha \quad (2.17)$$

Las cantidades α y β son cantidades positivas. Pueden determinarse explícitamente en función de los parámetros conocidos pues

$$k^2 = \omega^2\mu(\epsilon' - \epsilon'') = (\beta - j\alpha)^2 \quad (2.18)$$

Igualando parte real e imaginaria, se pueden despejar α y β , obteniendo:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[\frac{(1 + tg^2\delta)^{1/2} + 1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[\frac{(1 + tg^2\delta)^{1/2} - 1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

Donde se ha definido la *tangente de pérdidas*

$$tg\delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (2.21)$$

En consecuencia, los fasores campo eléctrico y magnético pueden ser escritos como:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{H}}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (2.23)$$

El término $e^{-j\beta z}$ indica propagación de la onda según $\hat{z}$ con una velocidad de fase $v_p = \omega/\beta$. Por esta razón, β es llamada *constante de propagación*.

Por otra parte, el factor $e^{-\alpha z}$ indica que la onda se atenúa a medida que se propaga, por lo que α recibe el nombre de *constante de atenuación*.

2.2. Casos particulares: buen aislante - buen conductor

A partir del análisis desarrollado en el punto anterior para ondas planas propagándose en un medio cualquiera con pérdidas, resulta interesante encontrar las expresiones que describen 2 situaciones particulares de interés práctico: ondas propagándose a través de medios *buenos aislantes* o *buenos conductores*.

La *tangente de pérdidas*, definida en la ecuación 2.21, es una manera útil de distinguir entre conductores y dieléctricos, pues permite comparar la magnitud de la corriente de conducción, representada por σ , con la corriente de desplazamiento, introducida por el factor $\omega\epsilon$.

Así, mientras menor sea la tangente de pérdidas, menor será la atenuación que sufra una onda propagándose en dicho medio y por lo tanto, menor la potencia disipada. Por eso cuando se requiera diseñar un sistema en que una onda deba ser propagada, será muy conveniente que la tangente de pérdidas sea pequeña. Un buen dieléctrico satisface

$$tg\delta \ll 1 \tag{2.24}$$

Capítulo 3

Incidencia de Ondas Planas sobre medios materiales

3.1. Introducción

Se vio que cuando un medio lineal, homogéneo, isótropo y sin distribuciones de carga o corriente es indefinido (es decir está en todo el espacio), las ondas planas son las soluciones naturales de las ecuaciones de Maxwell. Esto es sin embargo un caso ideal, pues debe existir alguna zona del espacio en que existan distribuciones de carga o corriente que actúen como fuentes generadoras de campo eléctrico y magnético. Una forma de generalizar esta situación es dividir el espacio en 2 regiones: en la región I, se incluirán todas las fuentes generadoras de campo y en la región II, al no existir cargas o corrientes, el campo será una combinación de ondas planas:

En el medio 2, la solución exacta cumplirá las condiciones de borde en la separación de las regiones I y II, es decir:

$$\hat{n} \times (\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_1)|_S = 0 \quad (3.1)$$

$$\hat{n} \cdot (\dot{\mathbf{D}}_2 - \dot{\mathbf{D}}_1)|_S = \sigma \quad (3.2)$$

$$\hat{n} \cdot (\dot{\mathbf{B}}_2 - \dot{\mathbf{B}}_1)|_S = 0 \quad (3.3)$$

$$\hat{n} \times (\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_1)|_S = \dot{\mathbf{J}}_S \quad (3.4)$$

S es la interfaz entre los medios y $\hat{n}$ es el vector normal que se ha elegido hacia el interior de II.

En régimen permanente sinusoidal sólo son necesarias las ecuaciones que corresponden a las componentes tangenciales del campo, las que de cumplirse, determinan de manera automática las otras 2 condiciones. De este modo, si las componentes tangenciales del campo electromagnético de la región I son medidas, es posible determinar completamente las ondas planas de la región II, es decir su amplitud y dirección de propagación. Considere la figura 3.2, en que

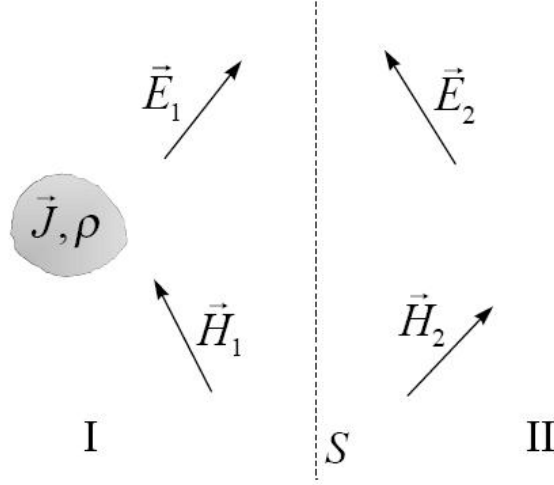


Figura 3.1:

existen 2 medios caracterizados por permitividad y permeabilidad propias. Si la región I es un dieléctrico lineal, homogéneo, isótropo, en él no existen pérdidas y se está en régimen permanente sinusoidal, se puede considerar el campo como una (o una combinación de) onda plana, que satisface la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 \vec{E}_I + k_I^2 \vec{E}_I = 0$. De manera análoga, la intensidad de campo magnético, $\vec{H}_I$ satisface esa ecuación y además se cumple que $k_I = \sqrt{\mu_I \epsilon_I}$ es la constante de propagación de cada onda en el medio. Si la región II está formada por un medio de las mismas características del medio I (lineal, homogéneo, isótropo, en él no existen pérdidas y opera en régimen permanente sinusoidal), las ondas generadas (excitadas) también deben cumplir con la ecuación de Helmholtz. Por lo tanto a priori, las soluciones de los campos serán ondas diferentes en cada medio, pero que mediante las condiciones de borde 3.1 y 3.4 estarán ligadas. De este modo, se puede entender el campo electromagnético en la interfaz, que se genera por la propagación de un campo en el medio 1, como una fuente de excitación de ondas planas en el medio II.

3.2. Incidencia normal sobre conductores perfectos

3.2.1. Reflexión en la superficie de un conductor perfecto

Mediante consideraciones de energía, se puede ver que la incidencia de una onda plana sobre la superficie de un conductor perfecto provoca la existencia de una onda reflejada de la misma frecuencia de la que incide. Considere la figura 3.3, en que una onda plana incide perpendicular a la superficie. Se revisó que

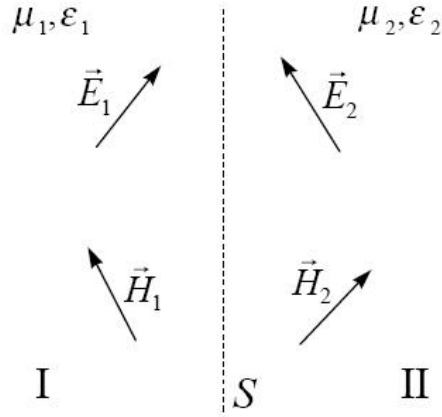


Figura 3.2:

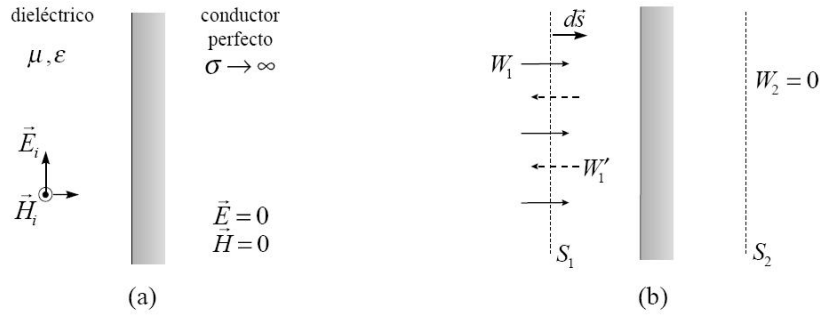


Figura 3.3:

un conductor perfecto siempre se encuentra en una condición de equilibrio, por lo que el campo eléctrico en su interior será nulo independiente de la frecuencia de la onda que incida. Por lo tanto se tendrá un flujo de potencia en la superficie del conductor y no existirá un flujo hacia el interior del conductor. Considerando una área cualquiera en la superficie del conductor, el flujo de potencia que entra a la región será:

$$W_1 = \int_{S_1} \dot{\mathbf{P}}_1 \cdot d\mathbf{s} \quad (3.5)$$

en que $\dot{\mathbf{P}}_1$ es el vector de Poynting asociado a la onda incidente. Del mismo modo, el flujo de potencia por S_2 será 0, pues esta superficie está dentro del conductor perfecto. De este modo, el flujo de potencia neto será hacia el interior de la región limitada entre S_1 y S_2 . El argumento anterior implica que, a medida que la onda propagada incide en la superficie S_1 , se va acumulando energía en

el interior de la región. Esta energía debe ser radiada de algún modo (de lo contrario se haría infinita). Esto se soluciona si se asume la existencia de un flujo de potencia W' que sale de la superficie S_1 , que contrarreste el flujo entrante. Esta onda reflejada se justifica plenamente a partir de la existencia de cargas y corrientes en la superficie del conductor. La onda incidente produce estas cargas y corrientes que varían en el tiempo de la misma forma que la onda incidente. A su vez, estas fuentes generan campos electromagnéticos variables, que dada la existencia de un medio conductor, sólo puede ser propagado hacia el medio dieléctrico.

Del hecho que el campo en el conductor es nulo, las ecuaciones 3.1 a 3.4 se reducen a:

$$\hat{n} \times \dot{\mathbf{E}}|_S = 0 \quad (3.6)$$

$$\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{D}}|_S = \sigma \quad (3.7)$$

$$\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{B}}|_S = 0 \quad (3.8)$$

$$\hat{n} \times \dot{\mathbf{H}}|_S = \mathbf{J}_S \quad (3.9)$$

Onda incidente polarizada linealmente

Los campos asociados a la onda tienen la forma general:

$$\dot{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}_{0i} e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (3.10)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{r}) = \frac{\hat{k}_i}{\eta} \times \dot{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

El campo $\dot{\mathbf{E}}_i$ puede en principio, tener una polarización cualquiera, pero se considerará el caso en que esté polarizada linealmente (recordar que una onda plana con una polarización cualquiera puede ser descompuesta como una combinación lineal de ondas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales). El eje coordenado será fijado de tal forma que el eje Z sea perpendicular a la interfaz de separación, lo que implica $\hat{k}_i = \hat{z}$. Asimismo, el eje Y se hará coincidir con la dirección del campo eléctrico. De este modo:

$$\dot{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}) = E_{0i} e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{y} \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{r}) = -\frac{E_{0i}}{\eta} e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{x} \quad (3.13)$$

La onda reflejada se supondrá propagándose en la dirección opuesta a la onda incidente, $\hat{k}_r = -\hat{z}$. Luego:

$$\dot{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}_{0r} e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (3.14)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\eta} \hat{z} \times \dot{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

eligiendo la superficie de separación entre los medios dieléctrico y conductor de modo tal que coincida con el plano $z = 0$, y teniendo en cuenta que el campo total en el dieléctrico es igual a la superposición del campo incidente y reflejado, la condición 3.5 fuerza que el campo eléctrico de la onda reflejada tenga componente en $\hat{y}$, es decir:

$$\dot{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}) = E_{0r}e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}}\hat{y} \quad (3.16)$$

Por lo tanto, para que se cumpla la condición de contorno en la superficie

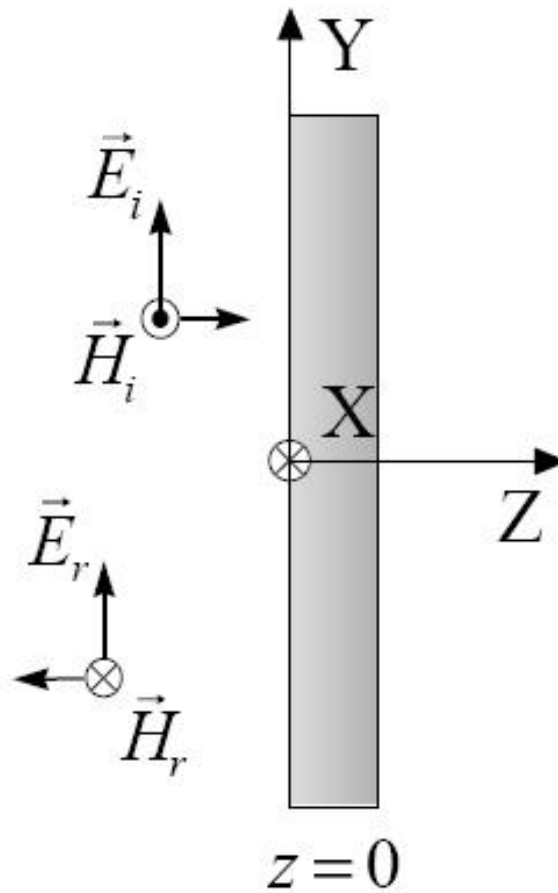


Figura 3.4:

del conductor, la amplitud y polarización de los campos eléctricos incidente y

reflejado deben ser iguales. Además se introduce un desfase de π en el campo instantáneo de la onda reflejada respecto de la incidente.

Cargas y corrientes inducidas

Se debe ver que el resto de las condiciones son satisfechas con la solución propuesta en el punto anterior. Para ello deben obtenerse las expresiones de los campos totales tras la reflexión. Sumando 3.10 con 3.14 se obtiene la expresión para el campo eléctrico:

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = E_i(e^{-j\mathbf{k}z} - e^{j\mathbf{k}z})\hat{y} = -2jE_{0i}\text{sen}(\mathbf{k}z)\hat{y} \quad (3.17)$$

La distribución de carga inducida sale de la condición 3.7:

$$\sigma = (-\hat{z}) \cdot (\epsilon E)|_{z=0} = 0 \quad (3.18)$$

Con respecto al campo magnético, puede ser obtenida a partir de la relación 3.11:

$$\dot{\mathbf{H}}(z) = -2\frac{E_{0i}}{\eta}\cos(\mathbf{k}z)\hat{x} \quad (3.19)$$

De esta expresión se verifica directamente la condición 3.8, pues:

$$(-\hat{z}) \cdot (\mu\dot{\mathbf{H}})|_{z=0} = 0 \quad (3.20)$$

pues H no tiene componente en $\hat{z}$.

Por último, la condición 3.9 permite obtener la distribución de corriente inducida en la superficie del conductor. Sustituyendo apropiadamente la forma del campo magnético obtenida en 3.19 en 3.9:

$$\dot{\mathbf{J}}_S = (-\hat{z}) \times \dot{\mathbf{H}}|_{z=0} = 2\frac{E_{0i}}{\eta}\hat{y} \quad (3.21)$$

Es decir, se induce una corriente sinusoidal cuyo vector fasor es constante y que circula en la dirección del campo eléctrico de la onda incidente.

3.2.2. Ondas Estacionarias

Del análisis hecho previamente, se vio que debe existir un flujo de potencia W' saliente de la superficie, que satisfaga $W + W' = 0$ para que no se acumule potencia de manera indefinida en la región.

Esto trae como consecuencia que en el medio dieléctrico se forme una *onda estacionaria*, como resultado de la superposición de las ondas incidente y reflejada. Las ondas estacionarias no se propagan en el espacio, pero presentan otras propiedades. El campo instantáneo en el medio dieléctrico se obtiene, a partir de la expresión 3.17 como:

$$\mathbf{E}(z, t) = \Re \left[\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t} \right] = -2E_{0i}\text{sen}(\mathbf{k}z)\text{sen}(\omega t)\hat{y} \quad (3.22)$$

si se fija el origen del tiempo de modo tal que la amplitud E_{0i} sea un valor real.

El campo representado es una función que no se desplaza en el tiempo, sino que permanece estacionaria. Puede considerarse que el término $2E_{0i}\text{sen}(\omega t)$ es una *amplitud instantánea*. El campo eléctrico instantáneo, $\mathbf{E}(z, t)$ es entonces de la forma:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0(t)\text{sen}(kz)\hat{y} \quad (3.23)$$

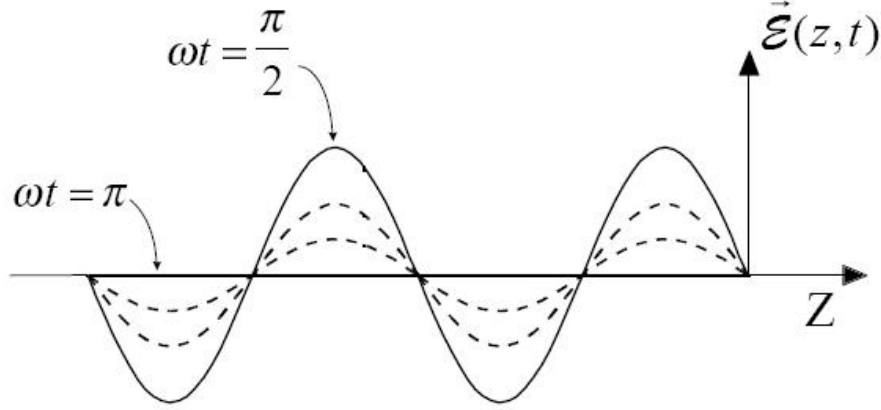


Figura 3.5:

Además existen una serie de puntos, llamados *nodos*, en que el campo es nulo para todo instante de tiempo. Estos nodos se encuentran a una distancia

$$d = m \frac{\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

de la interfaz del conductor. La distancia existente entre 2 nodos corresponde a media longitud de onda. El campo magnético instantáneo es:

$$\mathbf{H}(z, t) = \Re \left[\dot{\mathbf{H}}(z) e^{j\omega t} \right] = -2 \frac{E_{0i}}{\eta} \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{x} \quad (3.25)$$

Se puede verificar que el vector de Poynting medio es:

$$P_m = \frac{1}{2} \Re \left[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^* \right] = \frac{1}{2} \Re \left[4j |E_{0i}|^2 (\hat{y} \times \hat{x}) \text{sen}(kz) \cos(\omega t) \right] = 0 \quad (3.26)$$

lo que implica que una onda estacionaria *no transporta potencia a través del espacio*, pues corresponde a la superposición de 2 flujos de potencia de igual intensidad pero dirección opuesta.

3.3. Incidencia normal sobre medios dieléctricos

Dado que el segundo medio se trata de un dieléctrico no conductor, se puede asumir la existencia de una onda transmitida. Del mismo modo, se supone una onda reflejada.

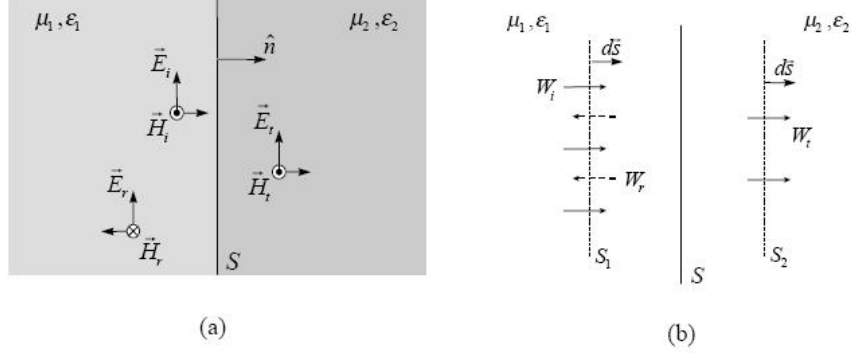


Figura 3.6:

Si no existen pérdidas en los medios, el flujo medio de potencia que incide en la interfaz de los medios debe ser igual al flujo medio saliente:

$$W_i + W_r = W_t \quad (3.27)$$

W_i y W_r son los flujos de potencia a través de S_1 correspondientes a las ondas incidente y reflejada, mientras que W_t es el flujo de potencia en S_2 ligado a la onda transmitida. En su forma integral esta relación es:

$$\int_{S_1} \dot{\mathbf{P}}_i \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{S_1} \dot{\mathbf{P}}_r \cdot d\mathbf{s}_1 = \int_{S_2} \dot{\mathbf{P}}_t \cdot d\mathbf{s}_2 \quad (3.28)$$

en que $\dot{\mathbf{P}}_i$, $\dot{\mathbf{P}}_r$ y $\dot{\mathbf{P}}_t$ corresponden a los vectores de Poynting incidentes, reflejados y transmitidos, respectivamente.

El campo electromagnético existente en los medios debe además satisfacer las condiciones de contorno. Si se supone que en los medios no existen portadores libres de carga o corrientes, las condiciones son:

$$\hat{n} \times (\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{E}}_1)|_S = 0 \quad (3.29)$$

$$\hat{n} \times (\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_1)|_S = 0 \quad (3.30)$$

Dado que no existen cargas o corrientes libres, las ondas reflejada y transmitida son originadas a partir de las cargas y corrientes ligadas al medio, las que al ser excitadas mediante un campo electromagnético variable en el tiempo verán modificadas su posición, dirección e intensidad de las corrientes. Fijando

el eje coordenado de forma que el eje Z coincida con la dirección de propagación de la onda incidente, y el Y con la dirección de polarización del campo eléctrico, los campos $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ nuevamente están dados por:

$$\dot{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}_{0i} e^{-jk_1 z} \hat{y} \quad (3.31)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{r}) = -\frac{\dot{\mathbf{E}}_{0i}}{\eta_1} e^{-jk_1 z} \hat{x} \quad (3.32)$$

en que $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ y $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$ son la impedancia intrínseca y la constante de propagación en el dieléctrico de la región I, respectivamente.

En lo que respecta a la onda reflejada, se supondrá propagándose en dirección opuesta a la onda incidente, es decir $-\hat{z}$, y con la misma polarización:

$$\dot{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}_{0r} e^{jk_1 z} \hat{y} \quad (3.33)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_r(\mathbf{r}) = \frac{\dot{\mathbf{E}}_{0r}}{\eta_1} e^{jk_1 z} \hat{x} \quad (3.34)$$

La onda transmitida se asumirá que conserva la polarización y se propaga en el mismo sentido de la onda incidente, es decir:

$$\dot{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{E}}_{0t} e^{-jk_2 z} \hat{y} \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_t(\mathbf{r}) = -\frac{\dot{\mathbf{E}}_{0t}}{\eta_2} e^{-jk_2 z} \hat{x} \quad (3.36)$$

donde $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$ y $k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$ son la impedancia intrínseca y la constante de propagación en el dieléctrico de la región II.

Aplicando condiciones de contorno para el campo eléctrico en la separación de los 2 medios (como antes, la interfaz se encuentra en el plano $Z = 0$):

$$(\dot{\mathbf{E}}_{iy} + \dot{\mathbf{E}}_{ry})|_{z=0} = \dot{\mathbf{E}}_{ty}|_{z=0} \quad (3.37)$$

Sustituyendo las expresiones de los campos correspondientes, y evaluando en $z = 0$, se obtiene la siguiente relación para las amplitudes:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (3.38)$$

Una consecuencia de que exista onda transmitida es que se necesita una ecuación adicional para determinar completamente las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Para ello, se aplica la condición de borde correspondientes a las componentes tangenciales del campo magnético, es decir:

$$(H_{ix} + H_{rx})|_{z=0} = H_{tx}|_{z=0} \quad (3.39)$$

relación en la que al sustituir las expresiones correspondientes a campos eléctricos:

$$-\frac{E_{0i}}{\eta_1} + \frac{E_{0r}}{\eta_1} = -\frac{E_{0t}}{\eta_2} \quad (3.40)$$

Se definen los *coeficientes de transmisión y reflexión* como:

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad (3.41)$$

$$\tau = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \quad (3.42)$$

coeficientes que permiten expresar las ecuaciones 3.38 y 3.40 como:

$$1 + \rho = \tau \quad (3.43)$$

$$1 - \rho = \tau \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (3.44)$$

Resolviendo el sistema, se obtienen las expresiones para los coeficientes:

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (3.45)$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (3.46)$$

Cuando los medios no son magnéticos, los coeficientes de reflexión y transmisión suelen expresarse en función de los *índices de refracción* de los medios I y II. Se define el índice de refracción de un medio como la relación entre las velocidades de propagación de la luz en el vacío y en el medio, dicho de otro modo:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{k}{k_0} \quad (3.47)$$

Cuando el medio es no magnético, es decir, $\mu_r = 1$, se cumple que:

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (3.48)$$

esto permite escribir la impedancia intrínseca de un medio, η , como:

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} \quad (3.49)$$

Y por lo tanto, los coeficientes de reflexión y refracción para dieléctricos no magnéticos se reducen a:

$$\rho = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.50)$$

$$\tau = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.51)$$

en que n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios I y II

Capítulo 4

Guías de Onda

4.1. Ondas TE

Para las ondas transversales eléctricas, h_z se comporta como una función potencial a partir de la que se pueden obtener las demás componentes del campo. e_z por su parte, es 0. Se supone una dependencia espacial en z de la forma $e^{j\beta z}$.

El campo $\dot{\mathbf{h}}_z$ es solución de la ecuación

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{h}}_z + k_c^2 \dot{\mathbf{h}}_z = 0 \quad (4.1)$$

Suponiendo una solución del tipo: $\dot{\mathbf{h}}_z = f(x)g(y)$, la ecuación 4.1 se convierte en:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} + k_c^2 = 0 \quad (4.2)$$

además

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -k_x^2 \quad (4.3)$$

y

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -k_y^2 \quad (4.4)$$

y por tanto

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (4.5)$$

Las soluciones para ambas ecuaciones son:

$$f(x) = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x) \quad (4.6)$$

$$g(y) = B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y) \quad (4.7)$$

Todas las constantes pueden obtenerse a partir de las condiciones de borde que satisface h_z .

Si se suponen paredes perfectamente conductoras, la componente normal de $\mathbf{h}$ se anula:

$$\hat{n} \cdot \nabla_t h_z = 0 \quad (4.8)$$

Además, $\dot{\mathbf{e}}$ tangente a las paredes es 0, por lo tanto, dado que

$$\dot{\mathbf{e}} = -z_h \hat{k} \times \mathbf{h} \quad (4.9)$$

se tiene que:

$$\hat{n} \times \dot{\mathbf{e}} = -z_h \hat{n} \times \hat{k} \times \mathbf{h} = -z_h (\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{h}} \hat{k} - \hat{n} \cdot \hat{k} \dot{\mathbf{h}}) = 0 \quad (4.10)$$

Las condiciones para h_z son, por lo tanto:

$$\frac{\partial h_z}{\partial x} = 0 \quad , \text{ en } x = 0, y = a \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial y} = 0 \quad , \text{ en } y = 0, x = b \quad (4.12)$$

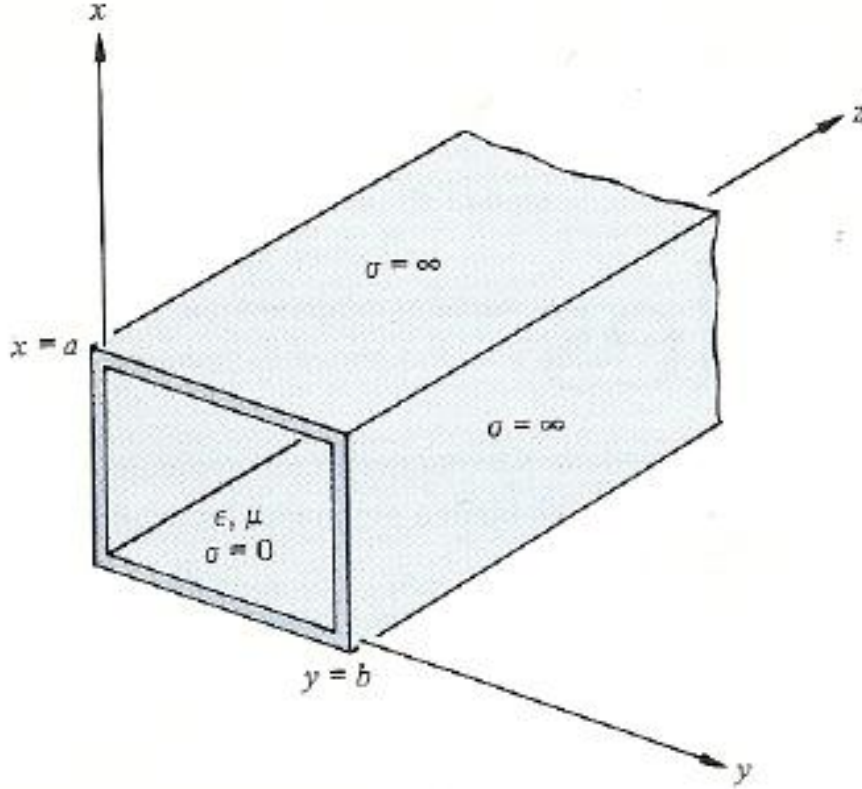


Figura 4.1: Geometría de la guía de ondas

Derivando $\dot{\mathbf{h}}_z = f(x)g(y)$ respecto a x e y , y utilizando las condiciones de borde encontradas se obtiene:

$$-k_x A_1 \text{sen}(k_x x) + k_x A_2 \cos(k_x x) = 0 \quad (4.13)$$

evaluando en $x = 0$, se obtiene que $A_2 = 0$. Para obtener una solución no nula, se requiere que

$$\text{sen}(k_x x) = 0 \quad \text{para } x = a \quad (4.14)$$

obteniéndose los valores de k_x :

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (4.15)$$

Haciendo un procedimiento análogo para y , se encuentra que $B_2 = 0$, por lo que:

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (4.16)$$

Usando las relaciones obtenidas, y designando $A_{nm} = A_1 B_1$, las soluciones para h_z serán:

$$h_z = A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (4.17)$$

A_{nm} es una constante de amplitud arbitraria asociada al modo nm . El número de onda para el modo nm se designa por $k_{c,nm}$ y es:

$$k_{c,nm} = \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right] \quad (4.18)$$

y es claramente un valor que depende solo de las dimensiones de la guía. La constante de propagación para un modo nm arbitrario es

$$\gamma_{nm} = j\beta_{nm} \quad (4.19)$$

$$= j\sqrt{k_0^2 - k_{c,nm}^2} \quad (4.20)$$

$$= j \left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.21)$$

Si $k_0 < K_{c,nm}$, β_{nm} es real y por lo tanto la constante de propagación es compleja, lo que indica propagación. Si $k_0 > K_{c,nm}$, la constante de propagación es real negativa, por lo que el modo decae con la distancia. La frecuencia crítica tal que separa las bandas de propagación y no propagación se llama frecuencia de corte, $f_{c,nm}$. Esta se encuentra haciendo $k_0 = k_{c,nm}$:

$$f_{c,nm} = \frac{c}{\lambda_{c,nm}} \quad (4.22)$$

$$= \frac{c}{2\pi} k_{c,nm} \quad (4.23)$$

$$= \frac{c}{2\pi} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.24)$$

donde $c = 3 \cdot 10^8 [m/s]$.

La longitud de onda de corte es:

$$\lambda_{c,nm} = \frac{2ab}{(n^2b^2 + m^2a^2)^{1/2}} \quad (4.25)$$

El resto de las componentes del modo TE_{nm} o H_{nm} se encuentra a partir de h_z . Los resultados completos son:

$$h_z A_{nm} \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}\right) e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (4.26)$$

$$h_x = \pm j \frac{\beta_{nm}}{k_{c,nm}^2} A_{nm} \frac{n\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}\right) e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (4.27)$$

$$h_y = \pm j \frac{\beta_{nm}}{k_{c,nm}^2} A_{nm} \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}\right) e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (4.28)$$

$$e_x = z_{h,nm} A_{nm} j \frac{\beta_{nm}}{k_{c,nm}^2} \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}\right) e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (4.29)$$

$$e_y = -z_{h,nm} A_{nm} j \frac{\beta_{nm}}{k_{c,nm}^2} \frac{n\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}\right) e^{\mp j\beta_{nm}z} \quad (4.30)$$

donde

$$Z_{h,nm} = \frac{k_0}{\beta_{nm}} z_0 \quad (4.31)$$

Cuando el modo no se propaga, $Z_{h,nm}$ es imaginario puro, lo que indica que no existe un flujo neto de energía asociado a una onda evanescente.

4.2. Ondas TM

Para los modos TM, h_z es 0 y e_z juega el papel de función potencial a partir de la que pueden obtenerse las otras componentes del campo. El campo eléctrico e_z satisface la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla_t^2 e_z + k_c^2 e_z = 0 \quad (4.32)$$

Imponiendo una solución para e_z de la forma $e_z = f(x) \cdot g(y)$, y aplicando condiciones de borde $e_z = 0$ en $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, se obtiene la solución para e_z :

$$e_z = A_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (4.33)$$

Al igual que para las ondas TE, el número de onda viene dado por:

$$k_{c,nm} = \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.34)$$

y β_{nm} es

$$\beta_{nm} = (k_0^2 - k_{c,nm}^2)^{1/2} \quad (4.35)$$