UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRICA
AV. TUPPER 2007 SANTIAGO CHILE
FONO 56-2-6966938 FAX 56-2-6953881

EL32B CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

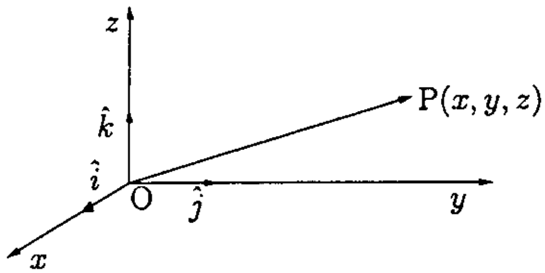
Complementos de Matemáticas

Santiago, Chile

2003.

1 NOTACION VECTORIAL.

Un vector es una cantidad que posee tanto magnitud como dirección. Un vector puede expresarse mediante tres componentes escalares según una terna de referencia convenientemente elegida. Los sistemas de coordenadas más comunes son el cartesiano, esférico y cilíndrico.
En el sistema de coordenadas cartesianas (fig. A.1) un vector queda representado por:



$$\vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Figura A.1

donde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son vectores unitarios en las direcciones O_x, O_y, O_z respectivamente.

1.1 Producto Escalar (o producto punto) de dos vectores.

El producto escalar de $\vec{U}$ y $\vec{V}$ se escribe $\vec{U} \cdot \vec{V}$; es un escalar igual al producto de las amplitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos. En términos de sus componentes, $\vec{U} \cdot \vec{V}$ está dado por:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (U_x\hat{i} + U_y\hat{j} + U_z\hat{k}) \circ (V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k})$$
$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

ya que

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \circ \hat{k} = \hat{k} \circ \hat{i} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \circ \hat{j} = \hat{k} \circ \hat{k} = 1$$

Si $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$, los dos vectores deben ser perpendiculares.

1.2 Producto vectorial (o producto cruz) de dos vectores.

El producto vectorial de $\vec{U}$ y $\vec{V}$ se escribe $\vec{U} x \vec{V}$; es un vector cuya amplitud es igual al producto de las amplitudes de los dos vectores y el seno del ángulo entre ellos, y cuya dirección es normal al plano que contienen a $\vec{U}$ y $\vec{V}$. La normal positiva está dada por la regla del tirabuzón o de la mano derecha, partiendo el movimiento de rotación del tirabuzón desde el primer vector del producto hacia el segundo (ver figura A.2).

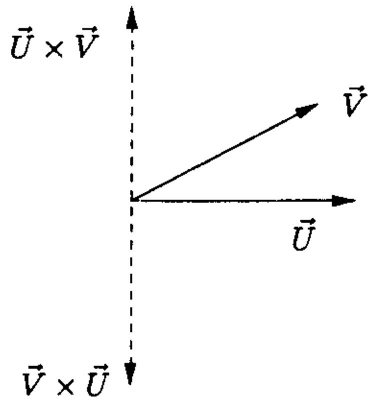


Figura A.2

En términos de los componentes vectoriales, $\vec{U}x\vec{V}$ está dado por:

$$\vec{U}x\vec{V} = (U_x\hat{i} + U_y\hat{j} + U_z\hat{k})x(V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k})$$

$$\vec{U}x\vec{V} = (U_yV_z - U_zV_y)\hat{i} + (U_z V_x - U_xV_z)\hat{j} + (U_xV_y - U_yV_x)\hat{k}$$

$$\vec{U}x\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

1.3 Divergencia de un Vector

Consideremos un punto rodeado de un pequeño volumen V. La componente de $\vec{U}$ normal a un elemento de la superficie S multiplicado por el área e integrado sobre la superficie, es el flujo normal (saliente) del vector $\vec{U}$. La razón entre este flujo y el volumen, a medida que el volumen tiende a cero, se denomina la divergencia de $\vec{U}$ y se escribe $\nabla \cdot \vec{U}$.
Por lo tanto, $\nabla \cdot \vec{U}$ es una cantidad escalar; es la medida del flujo saliente total de un vector por unidad de volumen

$$\nabla \cdot \vec{U} = \lim_{v \to 0}\left(\frac{1}{v}\oint_S \vec{U} \cdot \hat{n}ds\right)$$

En la fig. A.3, el exceso de flujo saliente sobre el flujo entrante en el plano yz es

$$(U_x + \frac{\partial U_x}{\partial x}\delta x)\delta y\delta z - U_x\delta y\delta z = \frac{\partial U_x}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

Considerando las otras contribuciones, se llega a que:

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

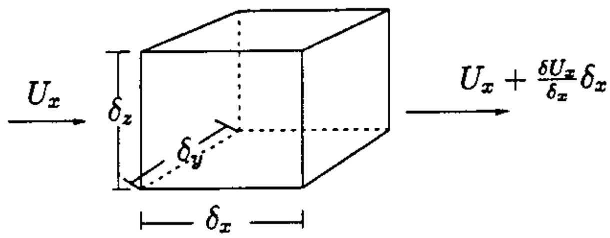


Figura A.3

Teorema de la divergencia o de Gauss

La integral de la divergencia de un vector sobre un volumen v es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie que limita a v.

$$\int_v \nabla \cdot \vec{U} dv = \oint_S \vec{U} \cdot \hat{n} ds$$

Para demostrar este teorema, subdividimos el volumen en un gran número de pequeños elementos. Si el elemento i tiene un volumen Δv_i y está limitado por una superficie S_i, tenemos:

$$\sum_i \oint_{S_i} \vec{U} \cdot \hat{n} ds = \oint_S \vec{U} \cdot \hat{n} ds$$

donde en cada integral del primer miembro la normal está dirigida hacia afuera del volumen Δv_i.
Como cada superficie común interior entre los volúmenes diferenciales tiene el flujo saliendo de un volumen y entrando exactamente al volumen adyacente, la contribución neta al flujo para la integral de superficie es cero para todas las superficies interiores. Contribuciones al flujo, diferentes de cero, se obtienen únicamente para aquellas superficies que limitan la superficie exterior S de v. El teorema de la divergencia se obtiene haciendo que el número de elementos tienda a infinito de modo que $\Delta v_i \to 0$. En estas condiciones:

$$\oint_S \vec{U} \cdot \hat{n} ds = \lim_{\Delta v_i \to 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta v_i} \oint_{S_i} \vec{U} \cdot \hat{n} ds \right\} \Delta v_i$$

y en el límite la sumatoria se transforma en integral de volumen sobre v y la razón entre la integral sobre S_i y Δv_i corresponde a $\nabla \cdot \vec{U}$.

$$\therefore \qquad \oint_S \vec{U} \cdot \hat{n} ds = \int_v \nabla \cdot \vec{U} dv$$

1.4 Rotacional de un vector.

El rotacional de un vector $\vec{U}$ se define en términos de una integral de línea alrededor de un camino infinitesimal, dividida por el área encerrada por el camino. El rotacional de un vector y la componente en cualquier dirección está dada por la integral de línea de $\vec{U}$ por unidad de área, para un área elemental normal a la dirección escogida; la normal positiva esta determinada por la regla del tirabuzón.

Consideremos un área elemental como la indicada en la Fig. A.4, con dimensiones $\delta y, \delta z$. Rotando alrededor de esta área según los punteros del reloj, al mirar en dirección O_x tenemos:

$$(\nabla x\vec{U})_x = \frac{1}{\delta y \delta z}\left\{U_y \delta y + (U_z + \frac{\partial U_z}{\partial y}\delta y) - (U_y + \frac{\partial U_y}{\partial z}\delta z) - U_z \delta z\right\} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right)$$

Calculando $(\nabla x\vec{U})_y$ y $(\nabla x\vec{U})_z$ en forma análoga, obtenemos:

$$\nabla x\vec{U} = (\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z})\hat{i} + (\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x})\hat{j} + (\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y})\hat{k}$$

$$\nabla x\, \vec{U} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}$$

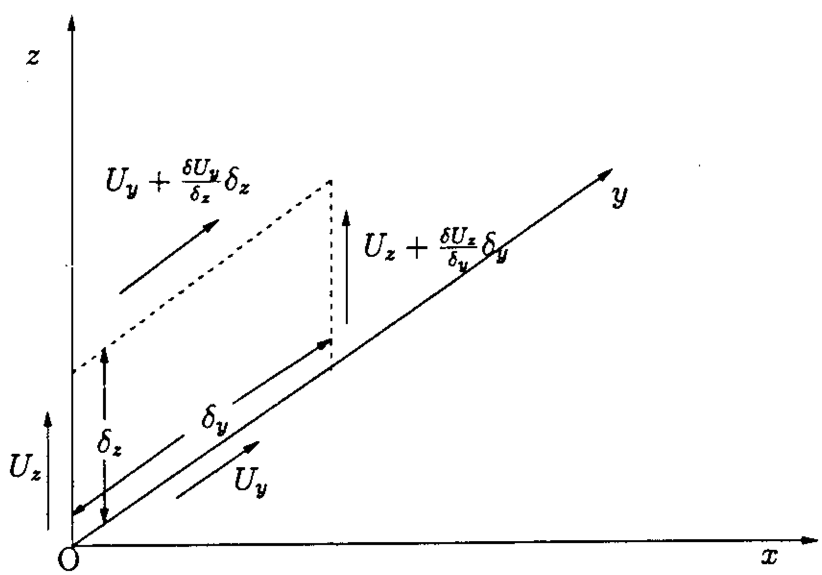


Figura A.4

Teorema de Stokes.

La integral del rotacional de un vector $\vec{U}$ sobre una superficie arbitraria S limitada por un contorno C es igual a la integral de línea del vector $\vec{U}$ sobre ese contorno.

$$\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla x \vec{U} \cdot \hat{n} ds$$

La dirección positiva de $\hat{n}$ (normal a un elemento de superficie) esta relacionada con el sentido positivo de recorrido del contorno C de acuerdo con la regla del tirabuzón.
El teorema se demuestra dividiendo la superficie S en un gran número de elementos diferenciales de área dS_i. Para cada elemento de área determinamos la integral $\oint \vec{U} \cdot d\vec{l}$ siguiendo el contorno en el sentido correspondiente al sentido positivo de $\hat{n}$. Si ahora se suman todas las integrales, las contribuciones provenientes del borde común de dos elementos cualesquiera se cancelan exactamente, quedando sólo la integral de línea sobre el contorno original C. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{l} &= \oint_{dS_1} \vec{U} \cdot d\vec{l} + \oint_{dS_2} \vec{U} \cdot d\vec{l} + ... \\ &= (\nabla x \vec{U}) \cdot d\vec{S}_1 + (\nabla x \vec{U}) \cdot d\vec{S}_2 + ... \\ &= \int_S \nabla x \vec{U} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

1.5 Gradiente de una función escalar

El gradiente de una función escalar ϕ es un vector cuya magnitud es la máxima derivada direccional en el punto considerado y cuya dirección es aquella de la máxima derivada direccional en ese punto.

En coordenadas cartesianas, el gradiente está dado por:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

El operador gradiente está definido por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

y tiene propiedades análogas a las de un vector ordinario. Se denomina también operador nabla.

1.6 Laplaciano de un escalar

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

1.7 Laplaciano de un vector

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} = \nabla^2 A_x\hat{i} + \nabla^2 A_y\hat{j} + \nabla^2 A_z\hat{k}$$

1.8 Identidades vectoriales

$$\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$$
$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\vec{B}$$
$$\nabla x(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla x\vec{A} + \nabla x\vec{B}$$
$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$
$$\nabla\cdot(\psi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\psi + \psi\nabla\cdot\vec{A}$$
$$\nabla x(\phi\vec{A}) = \nabla\phi x\vec{A} + \phi\nabla x\vec{A}$$
$$\nabla x(\vec{A}x\vec{B}) = \vec{A}\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\nabla\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$
$$\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi$$
$$\nabla\cdot\nabla x\vec{A} = 0$$
$$\nabla x\nabla x\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$
$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}x(\nabla x\vec{B}) + \vec{B}x(\nabla x\vec{A})$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}x\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}x\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{A}x\vec{B}$$
$$\vec{A}x(\vec{B}x\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$
$$\nabla x\nabla\phi = 0$$
$$\nabla\cdot(\vec{A}x\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla x\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla x\vec{B}$$

2 SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONALES

2.1 Coordenadas curvilíneas ortogonales (u_1, u_2, u_3)

Teniendo como base las coordenadas cartesianas o rectangulares, cualquier nuevo sistema de coordenadas u_1, u_2, u_3 puede ser definido en el espacio mediante la transformación:

$$x = f(u_1, u_2, u_3)$$
$$y = g(u_1, u_2, u_3)$$
$$z = h(u_1, u_2, u_3)$$

Asumiremos que las funciones f, g, h están definidas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un dominio D' del espacio $u_1 u_2 u_3$ y que las ecuaciones anteriores tienen como única solución para u_1, u_2 y u_3 las ecuaciones:

$$u_1 = F(x, y, z)$$
$$u_2 = G(x, y, z)$$
$$u_3 = H(x, y, z)$$

Las funciones inversas F, G, H estarán definidas en un dominio D del espacio xyz y denotaremos a u_1, u_2 y u_3 coordenadas curvilíneas en D. Se considerará además que el Jacobiano

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$$

es positivo y no nulo en D'.

Un punto P, puede especificarse por las coordenadas cartesianas (x, y, z) y por las coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3).

$$\vec{r}_p = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = f(u_1, u_2, u_3)\hat{i} + g(u_1, u_2, u_3)\hat{j} + h(u_1, u_2, u_3)\hat{k}$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3$$

El vector $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ es tangente a la coordenada u_i en P. Si $\hat{u}_i$ es el vector unitario en la dirección de $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ en P, entonces:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i \quad \text{donde } h_i = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\|$$

con lo cual:

$$d\vec{r} = h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3$$

h_1, h_2, h_3 se denominan Factores de Escala.

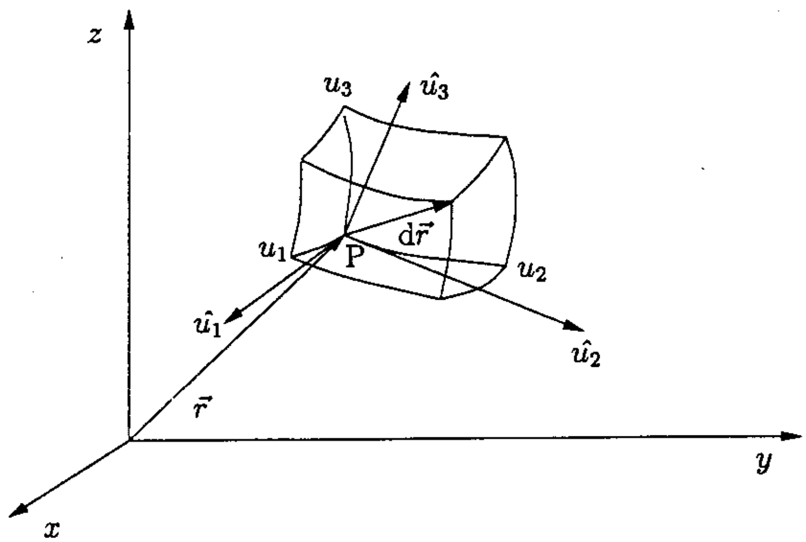


Figura A.5

Si $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ son ortogonales en todo punto P, las coordenadas curvilíneas son ortogonales. En este caso, se tiene que:

$$d\vec{l} = h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3$$

$$d\vec{S}_k = h_i h_j du_i du_j u_k$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

Además, si ϕ es una función escalar y $\vec{A}$ una función vectorial de las coordenadas curvilíneas ortogonales u_1, u_2, u_3:

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \hat{u}_3$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h \; h_2 A_3) \right]$$

$$\nabla x\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 u_1 & h_2 u_2 & h_3 u_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3})\right]$$

conocidas f, g, h los factores de escala se pueden obtener a partir de:

$$h_i^2 = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right\|^2 = (\frac{\partial f}{\partial u_i})^2 + (\frac{\partial g}{\partial u_i})^2 + (\frac{\partial h}{\partial u_i})^2 \quad ; \quad i = 1,2,3$$

ya que u_1, u_2, u_3 son coordenadas curvilíneas ortogonales.

2.2 Coordenadas Rectangulares (x, y, z)

a) Ecuaciones de transformación.

$u_1 = x \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$

$u_2 = y \quad ; \quad -\infty < y < +\infty$

$u_3 = z \quad ; \quad -\infty < z < +\infty$

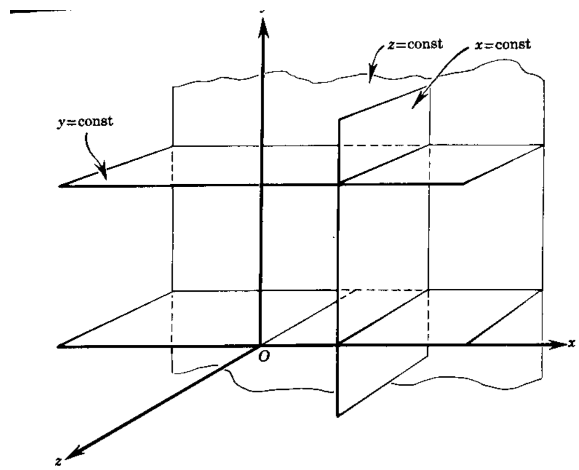


Figura A.6

b) Factores de Escala:

$h_x = 1 \quad h_y = 1 \quad h_z = 1$

c) Elementos Diferenciales:

$d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$

$d\vec{S} = dydz\hat{x} + dxdz\hat{y} + dxdy\hat{z}$

$dV = dxdydz$

d) Superficies Coordenadas:

$$x_0 = cte$$
$$y_0 = cte$$
$$z_0 = cte$$

e) Ecuaciones Importantes:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

2.3 Coordenadas Cilíndricas Circulares (r,ψ,z).

a) <u>Ecuaciones de Transformación.</u>

$$u_1 = r \qquad ; \qquad 0 \le r < +\infty$$
$$u_2 = \psi \qquad ; \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$$
$$u_3 = z \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$
$$x = r\cos(\psi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\psi) \qquad \psi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

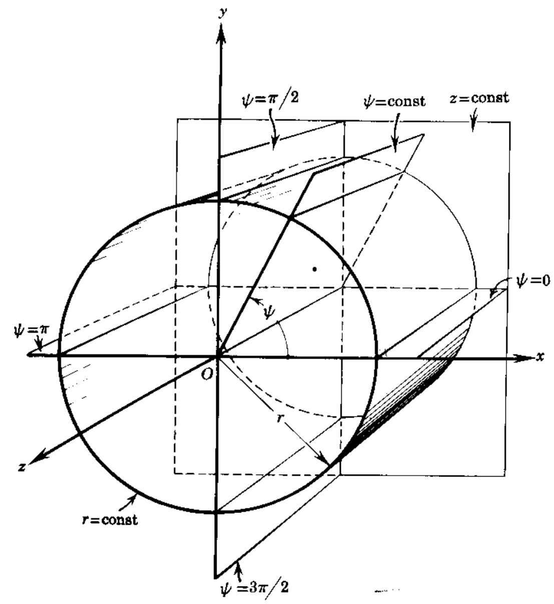


Figura A.7

b) <u>Factores de Escala:</u>

$$h_r = 1 \quad h_\psi = 1 \quad h_z = 1$$

c) <u>Elementos Diferenciales:</u>

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\psi\hat{\psi} + rdrd\psi\hat{z}$$

$$d\vec{S} = rd\psi dz\hat{r} + drdz\hat{\psi} + rdrd\psi\hat{z}$$

$$dV = rdrd\psi dz$$

d) <u>Superficies Coordenadas:</u>

$$r_0 = cte \qquad x^2 + y^2 = r_0^2$$
$$\psi_0 = cte \qquad y = x\,\mathrm{tg}(\psi_0)$$
$$z_0 = cte \quad \text{plano paralelo al plano xy}$$

e) <u>Ecuaciones Importantes:</u>

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\hat{\psi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{\partial}{\partial\psi}(E_\psi) + \frac{\partial}{\partial z}(rE_z)\right]$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{r}\left\{\left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial z}(rE_\psi)\right)\right]\hat{r} - r\left[\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z}\right]\hat{\psi} + \left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\psi) - \frac{\partial}{\partial\psi}(E_r)\right]\hat{z}\right\}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]$$

2.4 Coordenadas Cilíndricas Elípticas (η, ψ, z).

a) <u>Ecuaciones de transformación.</u>

$$u_1 = \eta \quad ; \quad 0 \le \eta < +\infty$$
$$u_2 = \psi \quad ; \quad 0 \le \psi < 2\pi$$

$$u_3 = z \quad ; \quad -\infty < z < +\infty$$
$$x = a\cosh(\eta)\cos(\psi)$$
$$y = a\,\text{senh}(\eta)\,\text{sen}(\psi)$$
$$z = z$$

b) <u>Factores de Escala:</u>

$$h_z = 1$$
$$h_\eta = a\sqrt{\text{senh}^2(\eta) + \text{sen}^2(\psi)} = h_\psi$$

c) <u>Elementos Diferenciales:</u>

$$d\vec{l} = h_\eta (d\eta\hat{\eta} + d\psi\hat{\psi}) + dz\hat{z}$$
$$d\vec{S}_\eta = h_\psi d\psi dz\,\hat{\eta}$$
$$d\vec{S}_\psi = h_\eta d\eta dz\,\hat{\psi}$$
$$d\vec{S}_z = h_\eta h_\psi d\eta d\psi\,\hat{z}$$
$$dV = a^2(\text{senh}^2(\eta) + \text{sen}^2(\psi))\,d\eta d\psi dz$$

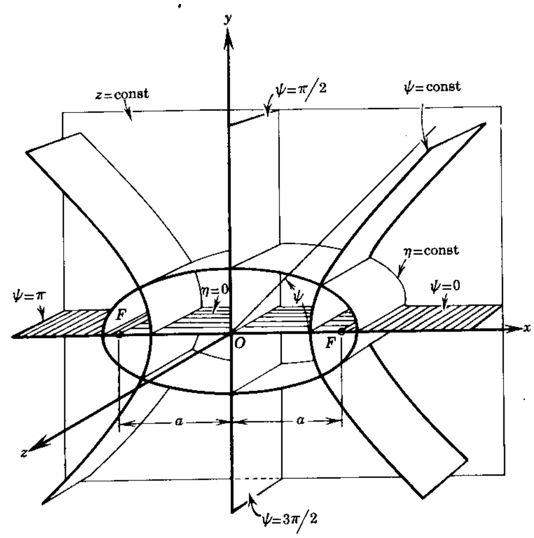


Figura A.8

d) <u>Superficies Coordenadas:</u>

$$\eta_0 = cte \qquad \left(\frac{x}{a\cosh(\eta_0)}\right)^2 + \left(\frac{y}{a\,\text{senh}(\eta_0)}\right)^2 = 1 \quad \text{cilindros elípticos}$$

$$\psi_0 = cte \qquad \left(\frac{x}{a\cos(\psi_0)}\right)^2 - \left(\frac{y}{a\,\text{sen}(\psi_0)}\right)^2 = 1 \quad \text{cilindros hiperbólicos}$$

$z = cte$ plano paralelo a xy

e) <u>Ecuaciones Importantes</u>

$$\nabla\phi = \frac{1}{a\sqrt{\text{senh}^2(\eta) + \text{sen}^2(\psi)}}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\hat{\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial\psi}\hat{\psi}\right] + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

2.5 Coordenadas Bicilíndricas (η, θ, z).

a) Ecuaciones de transformación.

$$u_1 = \eta \quad ; \quad -\infty < \eta < +\infty$$
$$u_2 = \theta \quad ; \quad -\pi \le \theta \le \pi$$
$$u_3 = z \quad ; \quad -\infty < z < +\infty$$
$$x = a\,\text{senh}(\eta)(\cosh(\eta) - \cos(\theta))^{-1}$$
$$y = a\,\text{sen}(\theta)(\cosh(\eta) - \cos(\theta))^{-1}$$
$$z = z$$

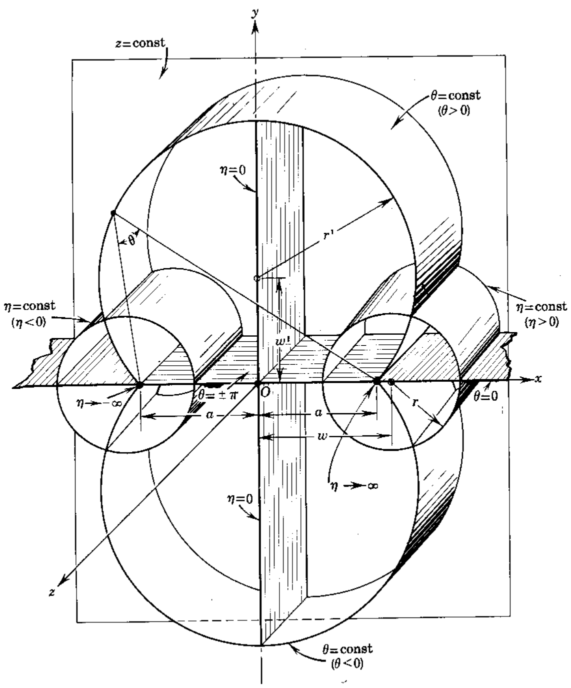


Figura A.9

b) Factores de Escala

$$h_\eta = h_\theta = a(\cosh(\eta) - \cos(\theta))^{-1}$$
$$h_z = 1$$

c) Elementos Diferenciales

$$d\vec{l} = h_\eta (d\eta\hat{\eta} + d\theta\hat{\theta}) + dz\hat{z}$$
$$d\vec{S}_\eta = h_\theta d\theta dz\,\hat{\eta}$$
$$d\vec{S}_\theta = h_\eta d\eta dz\,\hat{\theta}$$
$$d\vec{S}_z = h_\eta h_\theta d\eta d\theta\hat{z}$$
$$dV = a^2(\cosh(\eta) - \cos(\theta))^{-2} d\eta d\theta dz$$

d) Superficies Coordenadas

$$\eta_0 = cte \qquad (x - a\coth(\eta_0))^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cosech}(\eta_0)$$

$$r = a\left|\operatorname{cosech}(\eta_0)\right| \qquad \omega = a\coth(\eta_0)$$
$$a = \sqrt{\omega^2 - r^2}$$

$$\theta_0 = cte \qquad x^2 + (y - a\cot(\theta_0))^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2(\theta_0)$$
$$r' = a\left|\operatorname{cosec}(\theta_0)\right| \qquad \omega' = a\cot(\theta_0)$$
$$a = \sqrt{r'^2 - \omega'^2}$$

$z = cte$ plano paralelo a xy

2.6 Coordenadas Esféricas (r,θ,ψ)

a) Ecuaciones de Transformación

$u_1 = r \quad ; \quad 0 \le r < +\infty$

$u_2 = \theta \quad ; \quad 0 \le \theta < \pi$

$u_3 = \psi \quad ; \quad 0 \le \psi < 2\pi$

$$x = r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\psi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\psi) \qquad \theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$z = r\,\mathrm{sen}(\theta) \qquad \psi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\tfrac{y}{x}\right)$$

b) Factores de Escala

$h_r = 1$

$h_\theta = r$

$h_\psi = r\,\mathrm{sen}(\theta)$

c) Elementos Diferenciales

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\,\mathrm{sen}(\theta)d\psi\hat{\psi}$$

$$d\vec{S} = r^2\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta d\psi\hat{r} + r\,\mathrm{sen}(\theta)drd\psi\hat{\theta} + rdrd\theta\hat{\psi}$$

$$dV = r^2\,\mathrm{sen}(\theta)d\theta d\psi dr$$

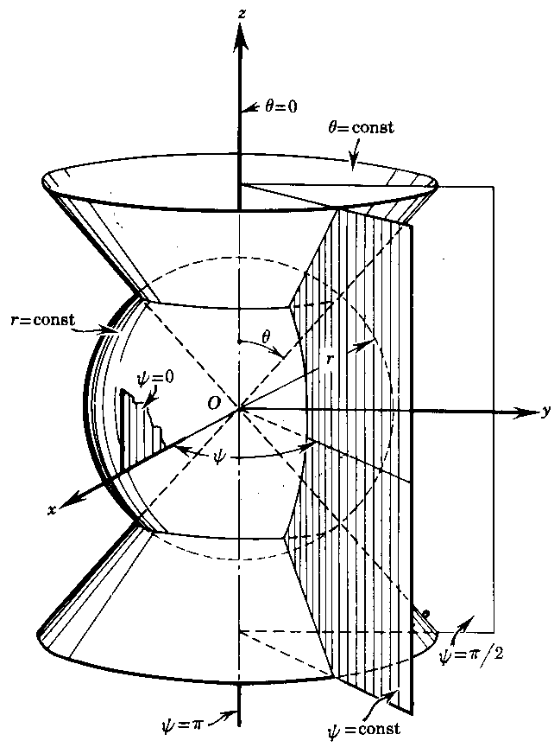


Figura A.10

d) Superficies Coordenadas

$$r_0 = cte \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$$

$$\theta_0 = cte \qquad z^2 = \cot g^2(\theta_0)(x^2 + y^2)$$

$$\psi_0 = cte \qquad y = (\mathrm{tg}(\psi_0))x$$

e) Ecuaciones Importantes

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\hat{\psi}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\mathrm{sen}(\theta)A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\,\mathrm{sen}(\theta)A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\psi}(rA_\psi)\right]$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}(\theta)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(r\,\mathrm{sen}(\theta)A_\psi) - \frac{\partial}{\partial\psi}(rA_\theta)\right)\hat{r} - \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathrm{sen}(\theta)A_\psi) - \frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right)r\hat{\theta}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(A_r)\right)r\,\mathrm{sen}(\theta)\hat{\psi}\right]$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{sen}(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\right)\right]$$

2.7 Coordenadas Esferoidales Alargadas (η, θ, ψ)

1. <u>Ecuaciones de Transformación</u>

$$u_1 = \eta \qquad 0 \le \eta < +\infty$$
$$u_2 = \theta \qquad 0 \le \theta < \pi$$
$$u_3 = \psi \qquad 0 \le \psi < 2\pi$$
$$x = a\,\mathrm{senh}(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\psi)$$
$$y = a\,\mathrm{senh}(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\psi)$$
$$z = a\cosh(\eta)\cos(\theta)$$

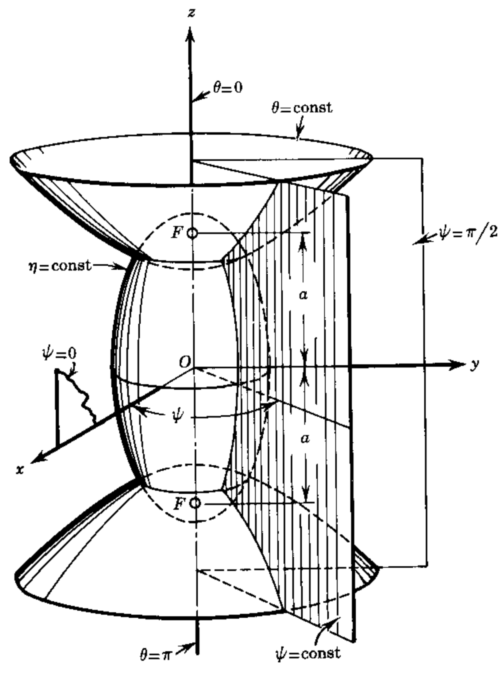


Figura A.11

2. <u>Factores de Escala</u>

$$h_\theta = h_\eta = a\sqrt{\mathrm{senh}^2(\eta) + \mathrm{sen}^2(\theta)}$$
$$h_\psi = a\,\mathrm{senh}(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

3. <u>Elementos Diferenciales</u>

$$d\vec{l} = a\sqrt{sen^2(\eta) + sen^2(\theta)}\,(d\eta\hat{\eta} + d\theta\hat{\theta})$$
$$+ a\,senh(\eta)sen(\theta)d\psi\hat{\psi}$$

$$d\vec{S}_\eta = h_\theta h_\psi\, d\theta d\psi \hat{\eta}$$
$$d\vec{S}_\theta = h_\eta h_\psi\, d\eta d\psi \hat{\theta}$$
$$d\vec{S}_\psi = a^2(\mathrm{senh}^2(\eta) + \mathrm{sen}^2(\theta))\,d\eta d\theta \hat{\psi}$$

$$dV = a^2(\mathrm{senh}^2(\eta) + \mathrm{sen}^2(\theta))\,\mathrm{senh}(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\eta d\theta d\psi$$

4. <u>Superficies Coordenadas</u>

$$\eta_0 = cte \qquad \frac{x^2}{a^2\,\mathrm{senh}^2(\eta_0)} + \frac{y^2}{a^2\,\mathrm{senh}^2(\eta_0)} + \frac{x^2}{a^2\cosh^2(\eta_0)} = 1$$

$$\theta_0 = cte \qquad \frac{x^2}{a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)} - \frac{y^2}{a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)} + \frac{z^2}{a^2\cos^2(\theta)} = 1$$

$$\psi_0 = cte \qquad y = (\mathrm{tg}(\psi_0))x$$

5. <u>Ecuaciones Importantes</u>

$$\nabla\phi = \frac{1}{a\sqrt{\mathrm{senh}^2(\eta) + \mathrm{sen}^2(\theta)}}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\hat{\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}\right] + \frac{\hat{\psi}}{a\,\mathrm{senh}(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}$$

2.8 Coordenadas Esferoidales Achatadas (η, θ, ψ)

1. Ecuaciones de Transformación

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \eta & \quad 0 \le \eta < +\infty \\
u_2 &= \theta & \quad 0 \le \theta \le \pi \\
u_3 &= \psi & \quad 0 \le \psi < 2\pi
\end{aligned}
$$

$$x = a\cosh(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\psi)$$
$$y = a\cosh(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\psi)$$
$$z = a\,\mathrm{senh}(\eta)\cos(\theta)$$

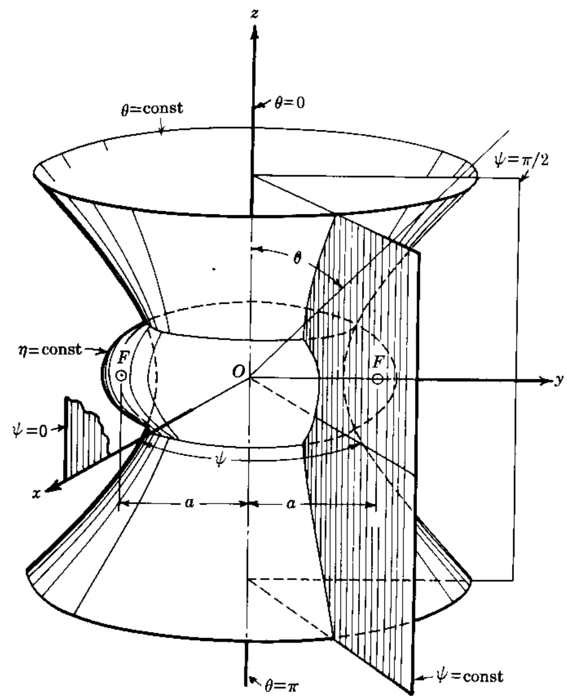


Figura A.12

2. Factores de Escala

$$h_\eta = h_\theta = a\sqrt{\cosh^2(\eta) - \mathrm{sen}^2(\theta)}$$
$$h_\psi = a\cosh(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

3 Elementos Diferenciales

$$d\vec{l} = a\sqrt{\cosh^2(\eta) - sen^2(\theta)}\,(d\eta\hat{\eta} + d\theta\hat{\theta})$$
$$+\, a\cosh(\eta) sen(\theta) d\psi\hat{\psi}$$
$$d\vec{S}_\eta = h_\theta h_\psi\, d\theta d\psi \hat{\eta}$$
$$d\vec{S}_\theta = h_\eta h_\psi\, d\eta d\psi \hat{\theta}$$
$$d\vec{S}_\psi = a^2(\cosh^2(\eta) - \mathrm{sen}^2(\theta))\hat{\psi}$$
$$dV = a^2(\cosh^2(\eta) - \mathrm{sen}^2(\theta))\cosh(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\eta d\theta d\psi$$

4. Superficies Coordenadas

$$\eta_0 = cte \qquad \frac{x^2}{a^2\cosh^2(\eta_0)} + \frac{y^2}{a^2\cosh^2(\eta_0)} + \frac{z^2}{a^2\,\mathrm{senh}^2(\eta_0)} = 1$$

$$\theta_0 = cte \qquad \frac{x^2}{a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)} + \frac{y^2}{a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)} - \frac{z^2}{a^2\cos^2(\theta)} = 1$$

$$\psi_0 = cte \qquad y = (\mathrm{tg}(\psi_0))x$$

5. Ecuaciones Importantes

$$\nabla\phi = \frac{1}{a\sqrt{\cosh^2(\eta) - \mathrm{sen}^2(\theta)}}\left[\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\hat{\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}\right] + \frac{\hat{\psi}}{a\cosh(\eta)\,\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}$$

3 Soluciones a la Ecuación de Laplace en Sistema de Coordenadas Ortogonales

3.1 Método General de Solución

La ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas ortogonales tiene la siguiente expresión:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3})\right] = 0$$

En el método de separación de variables, se supone que las funciones soluciones tendrán la forma:

$$\Phi(u_1,u_2,u_3) = f(u_1)g(u_2)h(u_3)$$

Y por consiguiente:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1})}{f} + \frac{\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial g}{\partial u_2})}{g} + \frac{\frac{\partial}{\partial u_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial h}{\partial u_3})}{h} = 0$$

Si los términos $\frac{h_ih_j}{h_k}$ son funciones sólo de u_k entonces necesariamente los términos

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u_k}(\frac{h_ih_j}{h_k}\frac{\partial\Phi_k}{\partial u_k})}{\Phi_k}$$

deberán ser iguales a una constante para que pueda cumplirse la igualdad a cero <u>para todo</u> (u_1,u_2,u_3).

Esta situación se puede producir en aquellos sistemas coordenados en los cuales h_i, h_j, h_k son constantes o bien existe algún par de factores de escala iguales ($h_i = h_j$).

3.2 Solución en Coordenadas Rectangulares (x, y, z)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

a) Para Φ independiente de z

Sea $\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$ entonces:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \alpha X = 0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} + \alpha Y = 0$$

Soluciones:

$$\text{Si } \alpha = p^2 \quad , \; X(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$$
$$, \; Y(y) = A'\,\text{sen}\, py + B'\cos py$$

$$\text{si } \alpha = -p^2 \quad , \; X(x) = A\,\text{sen}\, px + B\cos px$$
$$, \; Y(y) = A'e^{py} + B'e^{-py}$$

$$\text{si } \alpha = 0 \quad , \; X(x) = Ax + B$$
$$, \; Y(y) = A'y + B'$$

b) Para Φ independiente de z e y

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \qquad , \qquad \Phi(x) = Ax + B$$

3.3 Solución en Coordenadas Cilíndricas Circulares (r, ψ, z **)**

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

a) Para Φ independiente de z
Sea $\Phi(r,\psi) = R(r)T(\psi)$ entonces:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{\alpha}{r^2}R = 0 \qquad\qquad \frac{d^2T}{d\psi^2} + \alpha T = 0$$

Soluciones:

$$\text{Si } \alpha = p^2 \quad , \; R(r) = Ar^p + Br^{-p}$$
$$, \; T(\psi) = A'\,\text{sen}\, p\psi + B'\cos p\psi$$

$$\text{si } \alpha = 0 \quad , \; R(r) = A\ln r + B$$
$$, \; T(\psi) = A'\psi + B$$

b) Para Φ independiente de ψ
Sea $\Phi(r,z) = R(r)Z(z)$ entonces:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \alpha R = 0 \qquad\qquad \frac{d^2Z}{dz^2} + \alpha Z = 0$$

Soluciones:

$$\text{Si } \alpha = q^2 \quad , \; R(r) = AJ_0(iqr) + BY_0(iqr)$$
$$, \; Z(z) = A'\,\text{sen}\, qz + B'\cos qz$$

$$\text{si } \alpha = -q^2 \qquad , \; R(r) = AJ_0(qr) + BY_0(qr)$$
$$, \; Z(z) = A'e^{qz} + B'e^{-qz}$$

$$\text{si } \alpha = 0 \qquad , \; R(r) = A\ln r + B$$
$$, \; Z(z) = A'z + B'$$

c) Para Φ independiente de z y de r

$$\frac{d^2\Phi}{d\psi^2} = 0 \qquad \Phi(\psi) = A\psi + B$$

d) Para Φ independiente de z y ψ

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} = 0 \qquad \Phi(r) = ALn\, r + B$$

e) Relaciones importantes
J_0 es la función de Bessel de orden cero e Y_0 es la función de Bessel de segundo tipo y orden cero.
La función de Bessel de orden n es:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

La función de Bessel de segundo tipo y orden n es:

$$Y_n(x) = J_n(x)Lnx - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}\left\{G(k)+G(n+k)\right\}$$

$$\text{con} \quad G(k) = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} \qquad G(0) = 0$$

Para n = 0 las expresiones anteriores se reducen a:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$$

$$Y_0(x) = J_0(x)Lnx + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^{2k}}{2^k k!}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}$$

Las funciones de Bessel pueden ser aproximadas como:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{2n+1}{4}\pi)$$

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x - \frac{2n+1}{4}\pi)$$

Propiedades de estas funciones:
Sea F una función de Bessel de rimer o segundo tipo. Sea p el orden de esta función.

i) Recurrencia

$$F_{p-1}(ax) + F_{p+1}(ax) = \frac{2p}{ax} F_p(ax)$$

$$F_{p-1}(ax) + F_{p+1}(ax) = \frac{2}{a}\frac{d}{dx}\left\{F_p(ax)\right\}$$

ii) Diferenciación

$$\frac{d}{dx}\left\{F_p(ax)\right\} = -\frac{p}{a} F_p(ax) + aF_{p-1}(ax)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{F_p(ax)\right\} = \left[\frac{p(p-1)}{x^2} - a^2\right] F_p(ax) + \frac{a}{x} F_{p+1}(ax)$$

iii) Integración

$$\int x^{p+1} F_p(ax)dx = \frac{x^{p+1}}{a} F_{p+1}(ax)$$

$$\int x^{1-p} F_p(ax)dx = -\frac{x^{1-p}}{a} F_{p-1}(ax)$$

iv) Ortogonalidad

Las funciones de Bessel son ortogonales en el intervalo (a, b) con respecto a la función de peso x

$$\int_a^b x F_p(a_m x) F_p(a_n x) dx = 0 \qquad \text{para m} \neq \text{n}$$

donde la condición de borde es de la forma

$$k_1 F_p(a_m x) + k_2 F_p'(a_m x) = 0 \qquad \text{en } x = a \text{ y } x = b$$

Una función $f(x)$ puede ser expandida en el intervalo (a, b) en términos de una serie de funciones de Bessel:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m F_p(a_m x)$$

donde $$A_m = \frac{1}{N_m} \int_a^b x f(x) F_p(a_m x) dx \qquad \text{y} \qquad N_m = \int x F_p^2(a_m x) dx$$

v) Funciones de Bessel de primer y segundo tipo de orden cero, uno y fraccionario

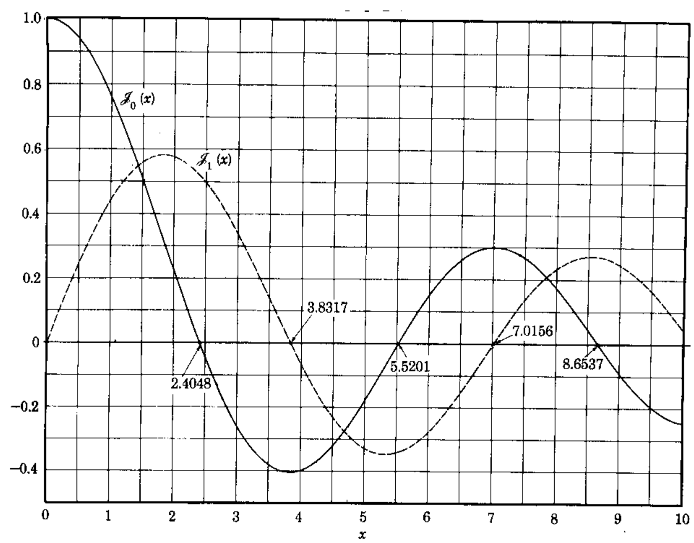


Figura A.13

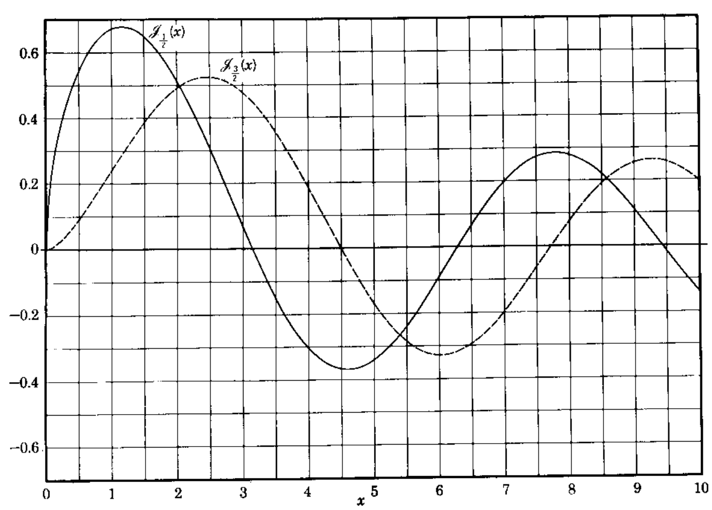


Figura A.14

3.4 Solución en Coordenadas Cilíndricas Elípticas (η, ψ, z)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}+a^2(\text{senh}^2\,\eta+\text{sen}^2\,\psi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

a) Para Φ independiente de z

Sea $\Phi(\eta,\psi)=U(\eta)V(\psi)$ entonces:

$$\frac{d^2U}{d\eta^2}-\alpha U=0 \qquad\qquad \frac{d^2V}{d\psi^2}+\alpha V=0$$

Soluciones:

$$\text{Si } \alpha = p^2 \qquad , \; U(\eta)=Ae^{p\eta}+Be^{-p\eta}$$
$$, \; V(\psi)=A'\text{sen}\,p\psi+B'\cos p\psi$$

b) Para Φ independiente de z y ψ

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}=0 \qquad , \qquad \Phi(\eta)=A\eta+B$$

c) Para Φ independiente de z y η

$$\frac{d^2\Phi}{d\psi^2}=0 \qquad , \qquad \Phi(\psi)=A\psi+B$$

3.5 Solución en Coordenadas Bicilíndricas (η,θ,z)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}+a^2(\cosh^2\eta+\cos^2\theta)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

a) Para Φ independiente de z

Sea $\Phi(\eta,\theta)=G(\eta)L(\theta)$ entonces:

$$\frac{d^2L}{d\theta^2}-\alpha L=0 \qquad\qquad \frac{d^2G}{d\eta^2}+\alpha G=0$$

Soluciones:

$$\text{Si } \alpha = p^2 \qquad , \; L(\theta)=Ae^{p\theta}+Be^{-p\theta}$$
$$, \; G(\eta)=A'\text{sen}\,p\eta+B'\cos p\eta$$

b) Para Φ independiente de z y θ

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}=0 \qquad , \ \Phi(\eta)=A\eta+B$$

c) Para Φ independiente de z y η

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}=0 \qquad , \ \Phi(\theta)=A\theta+B$$

3.6 Solución en Coordenadas Esféricas (r,θ,ϕ)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

a) Para Φ independiente de ϕ

Sea $\Phi(r,\theta)=R(r)T(\theta)$ entonces:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{\alpha}{r^2}R=0 \qquad \frac{d^2T}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dT}{d\theta}+\alpha\theta=0$$

Soluciones:

Si $\alpha=p(p+1)$ $\quad$, $R(r)=Ar^p+Br^{-p-1}$

$\quad$, $T(\theta)=A'P_p(\cos\theta)+B'Q_q(\cos\theta)$

b) Para Φ independiente de r

Sea $\Phi(\theta,\phi)=T(\theta)\Psi(\phi)$ entonces:

$$\frac{d^2T}{d\theta^2}+\cos\theta\frac{dT}{d\theta}-\frac{\alpha}{\operatorname{sen}^2\theta}\theta=0 \qquad \frac{d^2\Psi}{d\phi^2}+\alpha\Psi=0$$

Soluciones:

Si $\alpha=q^2$ $\quad$, $T(\theta)=AP_0^q(\cos\theta)+BQ_0^q(\cos\theta)$

$\quad$, $\Psi(\phi)=A'\operatorname{sen}q\phi+B'\cos q\phi$

c) Para Φ independiente de θ y ϕ

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr}=0 \qquad \Phi(\theta)=Ar^{-1}+B$$

d) Para Φ independiente de r y ϕ

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Phi}{d\theta}=0 \qquad\qquad \Phi(\theta)=ALn(\cot\frac{\theta}{2})+B$$

e) Relaciones importantes
P_0^q y Q_0^p son funciones de Legendre y P_p y Q_q son las funciones ordinarias de Legendre.
A continuación se presentan sus expresiones.

$$P_l^m(x)=1-\frac{x^2}{2!}\left\{l(l+1)-m^2\right\}+\frac{x^4}{4!}\left\{l(l+1)\left[l(l+1)-2m^2-14\right]+m^4+20m^2+24\right\}-\{...$$

$$Q_l^m(x)=x\left\{1-\frac{x^2}{3!}\left\{l(l+1)-m^2-2\right\}+\frac{x^4}{5!}\left\{l(l+1)\left[l(l+1)-2m^2-14\right]+m^4+20m^2+24\right\}-...\right.$$

$$l=1,2,3,...$$
$$m=-l,...,0,...,l$$

Las funciones ordinarias o polinomios de Legendre son:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$P_0(x)=1 \qquad Q_0(x)=\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1+x}{1-x}) \qquad |x|<1$$

$$P_1(x)=x \qquad Q_1(x)=xQ_0(x)-1$$

$$P_2(x)=\tfrac{1}{2}(3x^2-1) \qquad Q_2(x)=P_2(x)Q_0(x)-\tfrac{3}{2}x$$

Ortogonalidad:

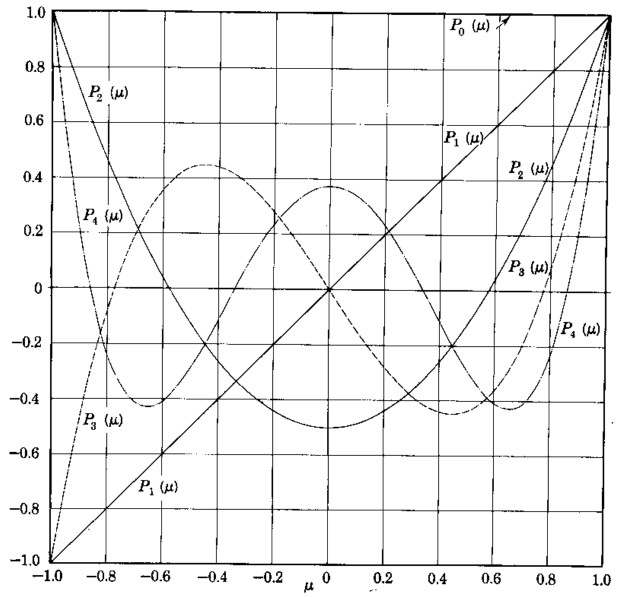
$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

Esta relación permite expresar una función $f(x)$ en el intervalo (-1,1) mediante el desarrollo en serie en términos de funciones de Legendre.

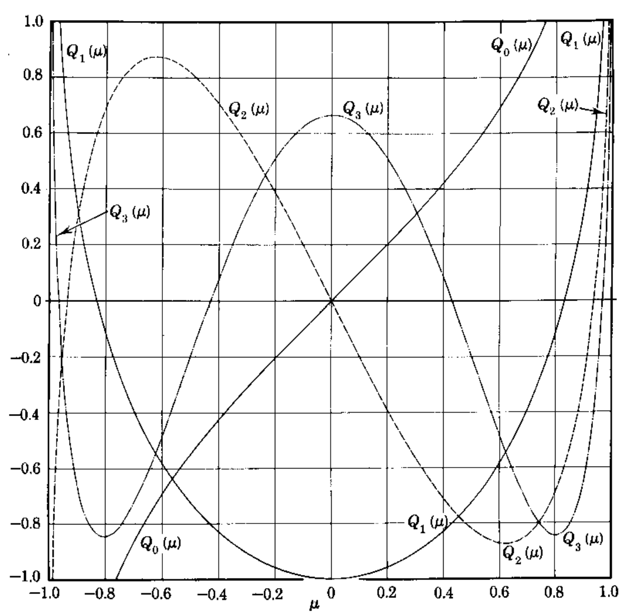
$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m P_m(x)$$

donde $A_m = \dfrac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx$

Los polinomios de Legendre son:



a) Polinomios de Legendre de primer tipo



b) Polinomios de Legendre de segundo tipo

Figura A.15

3.7 Solución en Coordenadas Esferoidales Alargadas (η, θ, ψ)

a) Para Φ independiente de θ y ψ

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \coth\eta \frac{d\Phi}{d\eta} = 0$$

$$\Phi(\eta) = ALn(\coth\frac{\eta}{2}) + B = A'Ln(tanh\frac{\eta}{2}) + B'$$

b) Para Φ independiente de η y ψ

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Phi}{d\theta} = 0$$

$$\Phi(\theta) = ALn(\cot\frac{\theta}{2}) + B = A'Ln(tan\frac{\theta}{2}) + B'$$

c) Relaciones de interés

$$\frac{d\Phi(\eta)}{d\eta} = -\frac{A}{\operatorname{senh}\eta}$$

3.8 Solución en Coordenadas Esferoidales Achatadas (η, θ, ψ)

a) Para Φ independiente de θ y ψ

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + tanh\eta \frac{d\Phi}{d\eta} = 0$$

$$\Phi(\eta) = Atan^{-1}(\operatorname{senh}\eta) + B = A'\cot^{-1}(\operatorname{senh}\eta) + B'$$

b) Para Φ independiente de η y ψ

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Phi}{d\theta} = 0$$

$$\Phi(\theta) = ALn(\cot\frac{\theta}{2}) + B = A'Ln(tan\frac{\theta}{2}) + B'$$

c) Relaciones de interés

$$\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} = -\frac{A}{\operatorname{sen}\theta}$$