EL3002 - Electromagnetismo Aplicado

Solución P2 - Aux 3

Como se indica en enunciado, el potencial será independiente de ϕ. Antes de la esfera, existía un campo primario constante de magnitud $\mathbf{E}_0$. Como $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, el potencial primario Φ_0 es entonces:

$$\Phi_0 = \mathbf{E_0} \cdot z = \mathbf{E_0} \cdot r cos(\theta) \tag{1}$$

Notemos que $\cos(\theta) = P_1(cos(\theta))$. Se definen 2 potenciales, uno para el medio y otro para la esfera:

Para r $\geq$ a

$$\Phi_{ex} = \sum_{p=0}^{\infty} (R(r) = A_p r^p + B_p r^{-p-1}) \cdot P_p(cos(\theta)) \tag{2}$$

Para r $\leq$ a

$$\Phi_{in} = \sum_{p=0}^{\infty} (R(r) = A'_p r^p + B'_p r^{-p-1}) \cdot P_p(cos(\theta)) \tag{3}$$

en donde por simplicidad se unieron las constantes que quedan multiplicadas.

CONDICIONES

- Cuando estamos muy lejos de la esfera, r muy grande, el campo total es el campo primario pues la esfera no perturba el medio. De la ecuación 2, se obtiene que $A_1 = \mathbf{E_0}$ y $A_p = 0$ si p $\neq$ 1.
- Para r = 0, el potencial debe estar acotado (finito), por lo que $B'_p = 0$ para todo p.

¿Cómo se relacionan ambos potenciales? Utilizamos condiciones de borde.

- Suponiendo cargas superficiales nulas en la interfaz, $D_{ex\ n} = D_{in\ n}$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_{ex}}{\partial r}|_{r=a} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r}|_{r=a} \tag{4}$$

$$\epsilon_1 \cdot \left[\mathbf{E_0} P_1(cos(\theta)) - \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) B_p a^{-(n+2)} P_p(cos(\theta)) \right] = \epsilon_2 \left[\sum_{p=0}^{\infty} n A'_p a^{n-1} P_p(cos(\theta)) \right] \tag{5}$$

Para p $\neq$ 1:

$$-\epsilon_1 (p+1) B_p a^{-(n+2)} P_p(cos(\theta)) = \epsilon_2 n A'_p a^{n-1} P_p(cos(\theta)) \tag{6}$$

Para p = 1:

$$\epsilon_1 \cdot \left[\mathbf{E_0} P_1(cos(\theta)) - 2 B_1 a^{-3} P_1(cos(\theta)) \right] = \epsilon_2 \left[A'_1 P_1(cos(\theta)) \right] \tag{7}$$

- Por continuidad del potencial en la interfaz:

$$E_0 a \cdot cos(\theta) + \sum_{p=0}^{\infty} B_p a^{-(p+1)} P_p(cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\infty} A'_p a^p P_p(cos(\theta)) \tag{8}$$

para p $\neq$ 1:

$$B_p a^{-(n+1)} P_p(cos(\theta)) = A'_p a^n P_p(cos(\theta)) \tag{9}$$

Para p = 1:

$$E_0 a P_1(cos(\theta)) + B_1 a^{-2} P_1(cos(\theta)) = A'_1 a P_1(cos(\theta)) \tag{10}$$

Las ecuaciones 6 y 9, sólo se satisfacen simultáneamente si B_p y $A'_p = 0$ para p $\neq$ 1, mientras que de las ecuaciones 7 y 10 se obtiene que:

$$B_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} a^3 E_0 \tag{11}$$

$$A'_1 = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 \tag{12}$$

Por lo tanto, los potenciales son:

$$\Phi_{in} = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot r \cdot E_0 cos(\theta) \tag{13}$$

$$\Phi_{out} = \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) \cdot r \cdot E_0 cos(\theta) \tag{14}$$

Y los campos pueden obtenerse a partir de ellos