

CI66J

**CI66J/CI71T
MODELACION DE AGUAS
SUBTERRANEAS**

**MODULO 3
ELABORACION DE MODELO NUMERICO EN
CONDICIONES TRANSIENTES**



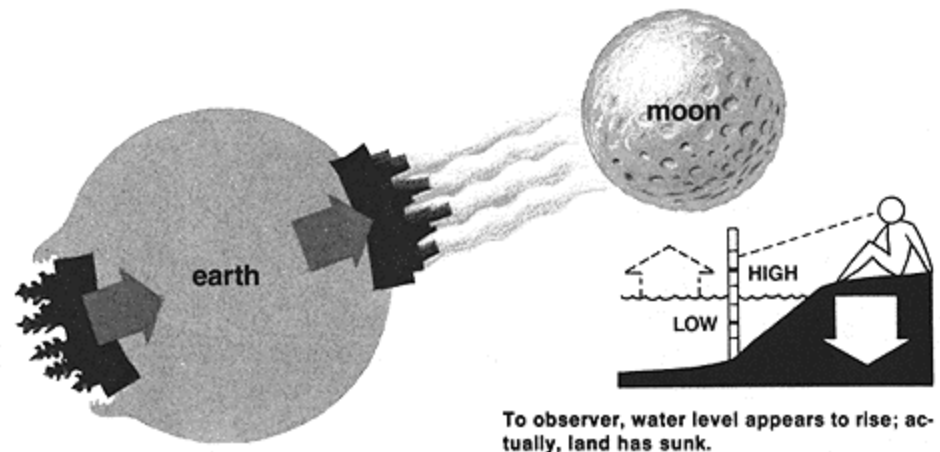
- **CASO EJEMPLO MAREAS**
- **CASO EJEMPLO EMBALSE**
- **ASPECTOS TEORICOS**



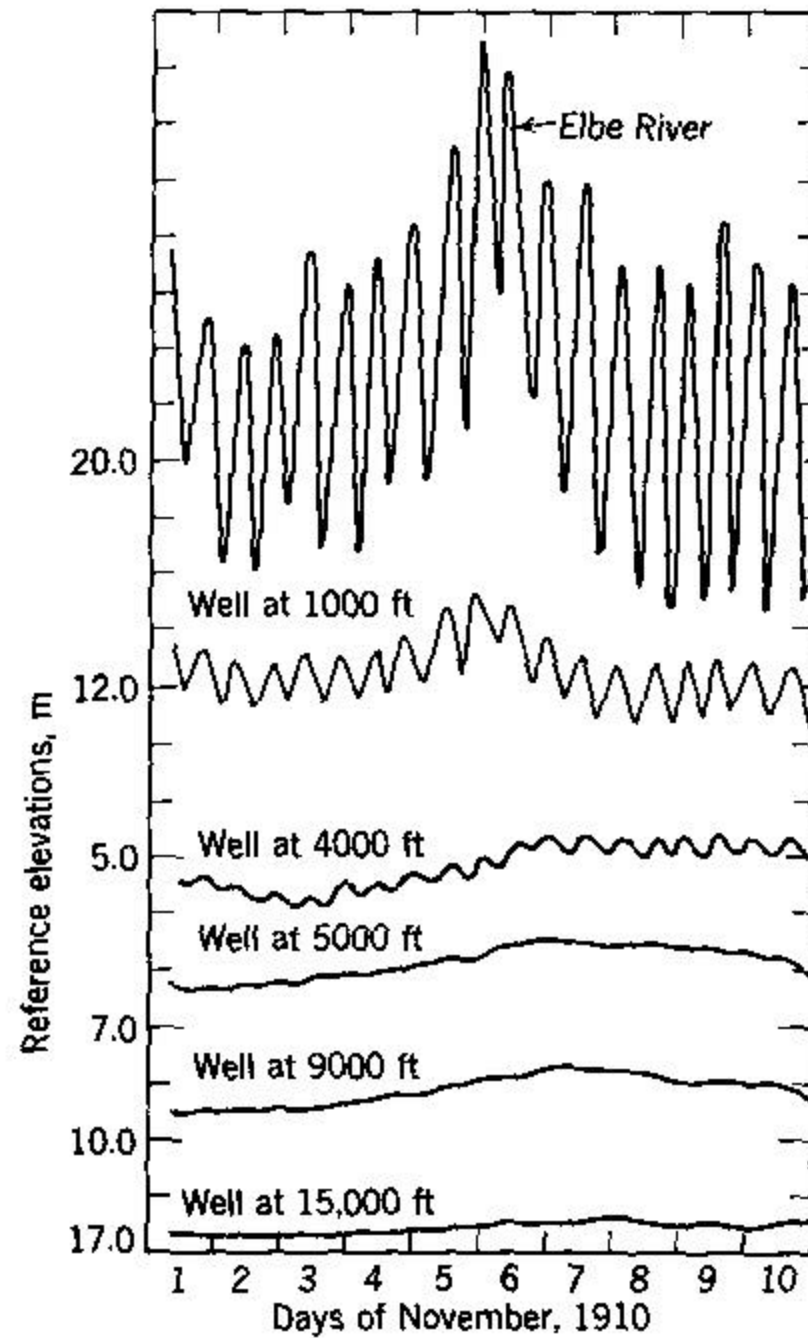
EFEECTO MAREA

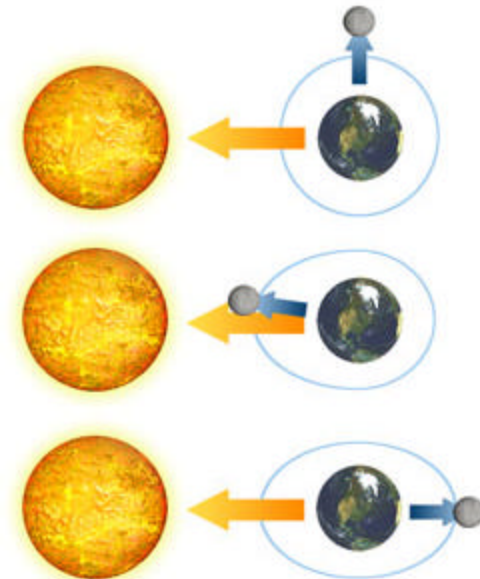
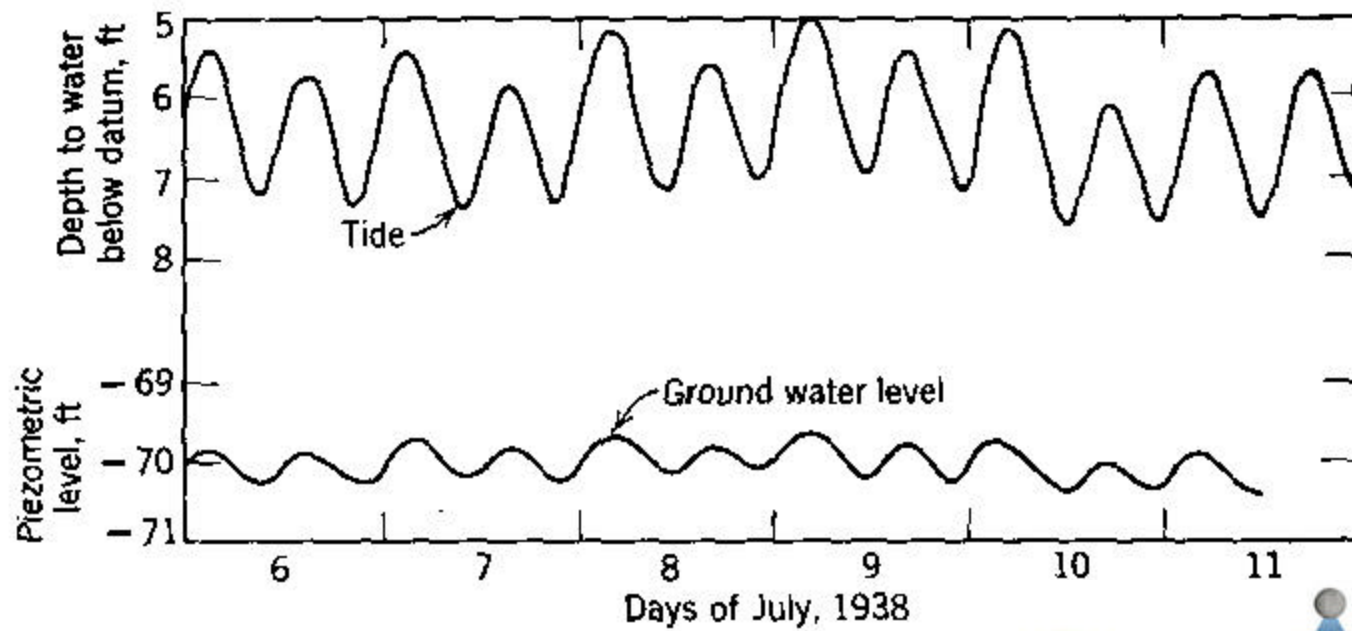
En acuíferos costeros en contacto con el océano, **fluctuaciones sinusoidales** del agua subterránea ocurren en respuesta a las mareas.

En este caso el aumento del nivel del agua de mar por efecto de las mareas se traduce en un aumento del nivel de agua en el acuífero, el que se traslada hacia el interior del sistema acuífero a una velocidad que descende paulatinamente debido a la pérdida de carga dentro del medio acuífero.

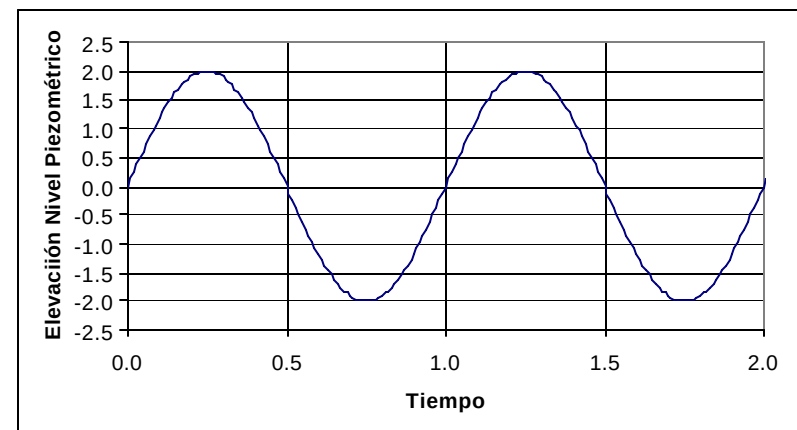
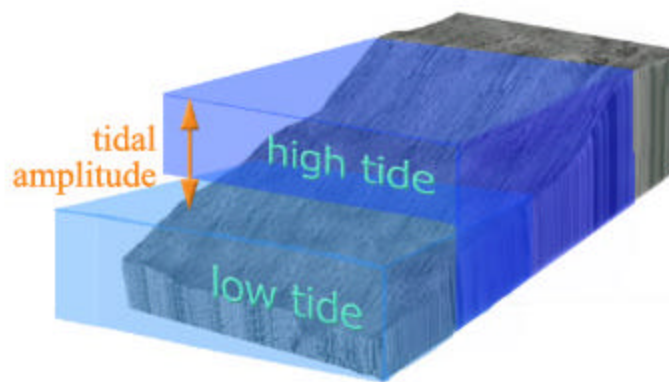
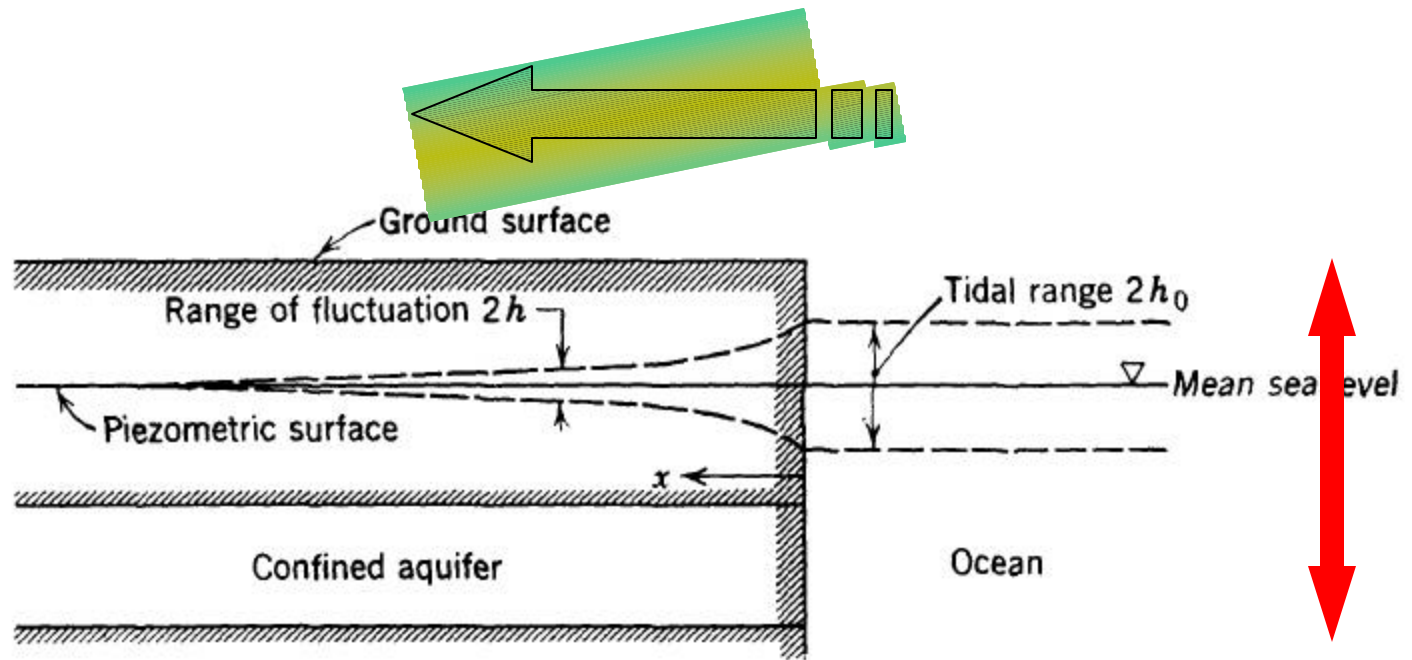


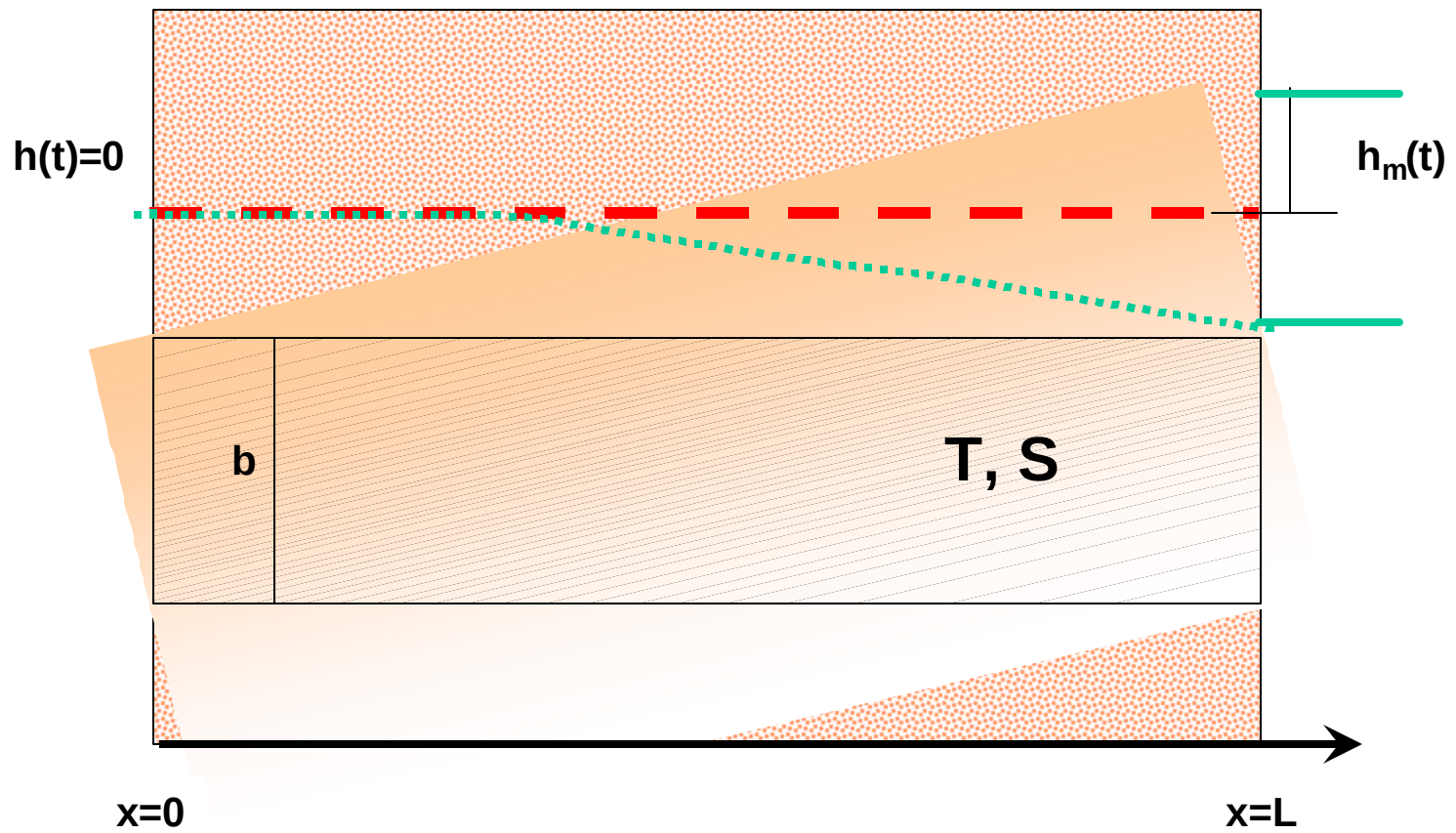
CI66J





CI66J





$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$



¿Problema a Resolver?

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$h(x=0, t) = h_0 \cdot \sin(w \cdot t)$$

$$w = \frac{2 \cdot p}{t_0}$$

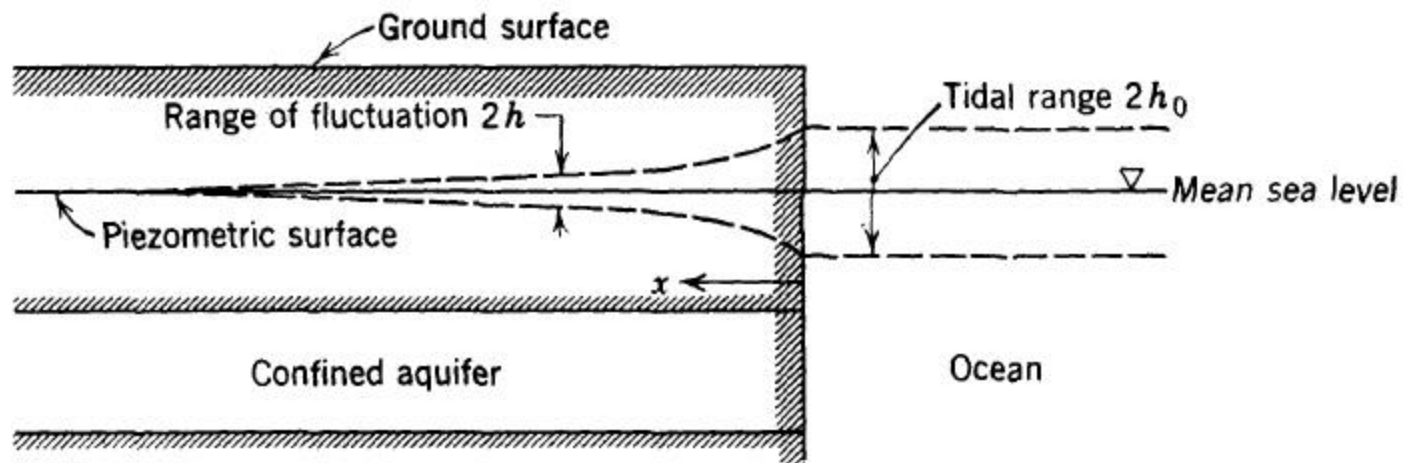
$$h(x \rightarrow \infty, t) = 0$$

$$h(x, t=0) = 0$$



Solución Analítica

$$h(x, t) = h_0 \cdot \exp\left(-x \cdot \sqrt{\frac{p \cdot S}{t_0 \cdot T}}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot p \cdot t}{t_0} - x \cdot \sqrt{\frac{p \cdot S}{t_0 \cdot T}}\right)$$

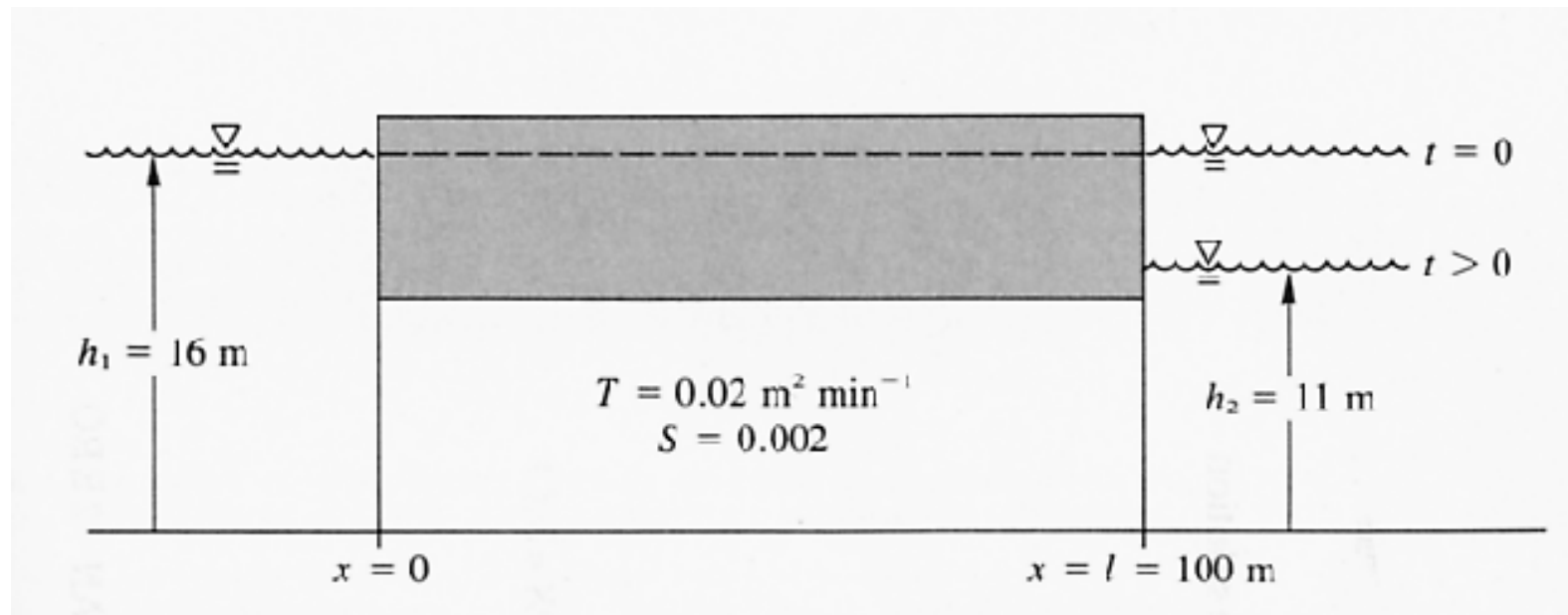


- CASO EJEMPLO MAREAS
- **CASO EJEMPLO EMBALSE**
- ASPECTOS TEORICOS



RESPUESTA DE UN ACUÍFERO ANTE UN CAMBIO BRUSCO EN EL NIVEL DE UN EMBALSE

Se desea estudiar los cambios en el nivel de energía del sistema (nivel piezométrico) ante un cambio brusco en el nivel del embalse ubicado en el costado derecho del acuífero.



¿Problema a Resolver?

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$h(x=0, t) = h_1$$

$$h(x=L, t) = h_2$$

$$h(x, t=0) = h_1$$



Solución Analítica

$$h(x,t) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} \cdot x + hh(x,t)$$

$$hh(x,t) = \frac{2}{p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h_2 - h_1) \cdot \cos(np)}{n} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{np x}{l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{T \cdot n^2 \cdot p^2 \cdot t}{S \cdot l^2}\right)$$



- CASO EJEMPLO MAREAS
- CASO EJEMPLO EMBALSE
- **ASPECTOS TEORICOS**



La ecuación diferencial que gobierna el flujo se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

donde h es la elevación o caída neta de la superficie piezométrica con respecto a un nivel predefinido.

Los términos anteriores pueden ser aproximados por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{h_{i-1}^{k+1} - 2 \cdot h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2}$$

k: período de tiempo

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cong \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t}$$

Al reemplazar lo anterior se obtiene:

$$\frac{h_{i-1}^{k+1} - 2 \cdot h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1}}{\Delta x^2} = \frac{S}{T} \cdot \frac{h_i^{k+1} - h_i^k}{\Delta t}$$



Luego de expandir se obtiene:

$$h_{i-1}^{k+1} - \left(2 + \frac{S \cdot \Delta x^2}{T \cdot \Delta t} \right) \cdot h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1} = -\frac{S \cdot \Delta x^2}{T \cdot \Delta t} \cdot h_i^k$$

Lo que se puede ordenar como:

$$h_{i-1}^{k+1} + b \cdot h_i^{k+1} + h_{i+1}^{k+1} = d_i^k$$

Donde:

$$b = -\left(2 + \frac{S \cdot \Delta x^2}{T \cdot \Delta t} \right)$$

$$d_i^k = -\frac{S \cdot \Delta x^2}{T \cdot \Delta t} \cdot h_i^k$$



Al combinar todas las ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_1^{k+1} \\ h_2^{k+1} \\ h_3^{k+1} \\ h_4^{k+1} \\ h_5^{k+1} \\ h_6^{k+1} \\ h_7^{k+1} \\ h_8^{k+1} \\ h_9^{k+1} \\ h_{10}^{k+1} \\ h_{11}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ d_2^k \\ d_3^k \\ d_4^k \\ d_5^k \\ d_6^k \\ d_7^k \\ d_8^k \\ d_9^k \\ d_{10}^k \\ H_2 \end{Bmatrix}$$

Al resolver se obtiene una solución para $\{h\}$.

