4. RELACIONES CONSTITUTIVAS. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

4.1 Ley de Hooke.

Robert Hooke planteó en 1678 que existe proporcionalidad entre las fuerzas aplicadas a un cuerpo elástico y las deformaciones producidas por dichas fuerzas. Extendiendo esta idea a las relaciones entre tensiones y deformaciones en un cuerpo, se puede decir que existe una relación lineal ellas. En la práctica, esto es tan sólo una aproximación, pues todos los materiales presentan cierto grado de no-linealidad. Sin embargo, en general es ésta una buena aproximación para varios materiales de uso frecuente, como el acero por ejemplo, especialmente cuando las deformaciones son pequeñas, alejadas del límite de proporcionalidad.

Como las relaciones tensión/deformación dependen de la naturaleza o constitución del material del cuerpo, se les denomina “relaciones constitutivas”.

Así, tomando como referencia una posición en reposo en la cual $s_{ij} = 0$, se tiene:

$$s_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \tag{4.1}$$

Como σ_{ij} y ε_{kl} son ambos simétricos, el número de constantes necesarias es 36. Además, para que exista una energía de deformación $W = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$ tal que $\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = s_{ij}$, lo cual es un principio fundamental de balance energético, la matriz de constantes debe ser simétrica.

En forma desarrollada las relaciones constitutivas son:

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{12} \\ s_{23} \\ s_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1123} & c_{1131} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2223} & c_{2231} \\ & & c_{3333} & c_{3312} & c_{3323} & c_{3331} \\ & \mathbf{Sim} & & c_{1212} & c_{1223} & c_{1231} \\ & & & & c_{2323} & c_{2331} \\ & & & & & c_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{31} \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

El número total de constantes, para el material más general posible, es entonces 21.

4.2 Materiales con planos de simetría. Ortotropía

Existen materiales cuya estructura tiene cierta simetría que permite reducir el número de constantes necesarias para describir el material. Así, en un material que presente un plano de simetría (el plano coordenado 1,2 por ejemplo), no habrá relación entre las deformaciones que son simétricas respecto a ese plano y las tensiones que son antimétricas respecto al mismo plano. La matriz de coeficiente toma entonces la forma:

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & c_{3312} & 0 & 0 \\ & \textbf{Sim} & & c_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & c_{2323} & c_{2331} \\ & & & & & c_{3131} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

cuando existen 3 planos de simetría mutuamente ortogonales, se habla de <u>material ortotrópico</u>. En caso que éstos sean paralelos a los ejes coordenados, la situación de la matriz de coeficiente será la siguiente:

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & \textbf{Sim} & & c_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & c_{2323} & 0 \\ & & & & & c_{3131} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Luego, para el caso más general de ortotropía se requieren 9 constantes.

4.3 Material cúbico. Parámetros de Lamé y módulos elásticos.

Si, además, las propiedades del material son iguales en las tres direcciones ortogonales, el material se denomina <u>cúbico</u> y se requerirán sólo tres constantes (a, b, d).

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

En lugar de los coeficientes α, β, se suele usar los llamados <u>parámetros de Lamé</u> l, m, que se definen de la siguiente forma:

$$a = 2m + l \tag{4.5a}$$
$$b = l \tag{4.5b}$$

Es decir:

$$c_{ijkl} = \begin{bmatrix} 2m+l & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 2m+l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 2m+l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

La relación inversa a la (4.6) se expresa normalmente en términos de los módulos elásticos E (Young) y ν (Poisson)

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{n}{E} & -\frac{n}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{n}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{E} & -\frac{n}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

donde:

$$E = \frac{m(3l + 2m)}{l + m} \qquad \textit{Módulo de Young} \qquad (4.8)$$

$$n = \frac{l}{2(l + m)} \qquad \textit{Razón de Poisson} \qquad (4.9)$$

$$G = \frac{d}{2} \qquad \textit{Módulo de corte}$$

Como se demostrará más adelante, para material isótropo se cumple la relación

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{E}}{2(1+n)}$$

Las relaciones inversas, para material isótropo, son:

$$l = \frac{En}{(1+n)(1-2n)} \qquad (4.10)$$

$$m = \frac{E}{2(1+n)} \qquad (4.11)$$

4.4. Material isótropo

Cuando el material es isótropo, es decir, sus propiedades son independientes de la dirección, existe una relación entre los módulos elásticos. El número de parámetros necesarios para definir el material se reduce entonces a sólo 2.

En efecto, supongamos un estado tensional en que sólo exista la componente normal en la dirección 1:

$$s_{11} = s$$
$$s_{22} = s_{33} = s_{12} = s_{23} = s_{33} = 0$$

Empleando la relación (4.7) se obtiene:

$$e_{11} = \frac{s}{E} \qquad (4.12)$$

Supongamos ahora que se hace una rotación de ejes en un ángulo q en el plano (1,2). Usando las leyes de transformación de coordenadas en función del ángulo doble (1.31) se obtiene:

$$\begin{aligned} s'_{11} &= \frac{s}{2}\left(1+\mathbf{cos}\,2q\right) \\ s'_{22} &= \frac{s}{2}\left(1-\mathbf{cos}\,2q\right) \\ s'_{12} &= -\frac{s}{2}\,\mathbf{sen}2q \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Usando las relaciones constitutivas y considerando que los módulos elásticos son iguales en cualquier dirección (propiedad de isotropía), se obtienen las siguientes deformaciones para los ejes girados:

$$\begin{aligned} e'_{11} &= \frac{s}{2E}\left[1-n+\left(1+n\right)\cos 2q\right] \\ e'_{22} &= \frac{s}{2E}\left[1-n-\left(1+n\right)\cos 2q\right] \\ e'_{12} &= {s'_{12}}\big/{d} = -\frac{s}{2d}sen2q \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Haciendo ahora una rotación de ejes -θ, se puede determinar una nuevo valor para ε_{11}, que debe ser igual al valor de partida $\frac{s}{\boldsymbol{E}}$.

$$e_{11} = \frac{e'_{11} + e'_{22}}{2} + \frac{e'_{11} - e'_{22}}{2} \boldsymbol{cos}\, 2q - e'_{12} \boldsymbol{sen} 2q$$
$$= \frac{s\left(1 - n\right)}{2\boldsymbol{E}} + \frac{s\left(1 + n\right)}{2\boldsymbol{E}} \boldsymbol{cos}^2\, 2q + \frac{s}{2d} \boldsymbol{sen}^2 2q = s/\boldsymbol{E} \qquad (4.15)$$

Reemplazando $cos^2 2q$ por $1\text{-}sen^2 2q$ y agrupando los términos en el primer miembro, se obtiene:

$$\left(-\frac{1+n}{2E} + \frac{1}{2d} \right) \mathrm{sen}^2\, 2q = 0 \qquad (4.16)$$

de donde resulta:

$$d = \frac{E}{1+n} = 2m \qquad (4.17)$$

Cuando se usan los módulos elásticos en lugar de los parámetros de Lamé, el término μ se denomina G = módulo elástico para la deformación angular.

Para un material isótropo, las relaciones constitutivas se pueden expresar en forma compacta como:

$$s_{ij} = 2m e_{ij} + d_{ij} l q, \quad con \quad q = e_{kk} = deformación \quad volumétrica \qquad (4.18)$$

o bien, empleando los módulos elásticos:

$$e_{ij} = \frac{1+n}{E} s_{ij} - d_{ij} \frac{3n}{E} s_0 \quad con \quad s_0 = s_{kk}/3 = \quad presión \quad media \qquad (4.19)$$

4.5 Módulo elástico volumétrico

Considerando la relación constitutiva (4.19), si se hace una contracción de índices sumando los términos de la diagonal, se obtiene:

$$e_{kk} = q = \frac{1+n}{E} 3s_0 - 3\frac{n}{E} 3s_0 = \frac{1}{E}\left(3s_0 - 6n s_0\right) = \frac{3s_0}{E}(1 - 2n) \qquad (4.20)$$

Luego:

$$\frac{s_0}{q} = K = \frac{E}{3\left(1 - 2n\right)} \qquad (4.21)$$

K es el módulo elástico volumétrico, es decir, la relación entre la presión media y el cambio unitario de volumen. Es interesante observar que cuando n ® 0.5, K ® ¥, es decir, el material se hace incompresible.

4.6 Relaciones constitutivas en términos de tensiones de desviación

Si en vez de usar el tensor de tensiones s_{ij} se usan las tensiones de desviación s_{ij}^{d}, las relaciones constitutivas de un material isótropo se pueden poner como

$$s_{kk} = 3Ke_{kk} \tag{4.22a}$$

$$s_{ij}^{d} = 2Ge_{ij}^{d} \tag{4.22b}$$

donde:

$$e_{ij}^{d} = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk} \tag{4.23}$$

La relación (4.22) muestra que las tensiones de desviación y las deformaciones de desviación son proporcionales entre si a través de una constante igual al doble del módulo de deformación angular. El 2 proviene del hecho que antes de la introducción del concepto de tensor, la deformación angular había sido definida como el doble de la componente de deformación del tensor de Cauchy.

4.7 Relaciones Deformación – Tensión – Temperatura

Para variaciones no muy grandes de temperatura, DT, se puede suponer que la deformación asociada es proporcional a ésta:

$$e_{ij}^{T} = d_{ij}a\Delta T(x_k) \tag{4.24}$$

donde α es el coeficiente de dilatación térmica.

El factor δ_{ij} proviene de la isotropía del material, por lo cual no es posible que un cambio de temperatura produzca deformaciones angulares.

Las deformaciones (4.24) se pueden producir libremente en los puntos del cuerpo si ellas cumplen con las relaciones de compatibilidad. De otra forma las deformaciones térmicas producen tensiones internas que inducen a su vez deformaciones, e_{ij}^{s}, las cuales deben sumarse a las anteriores para obtener las deformaciones totales, ε_{ij}. En consecuencia, en las relaciones constitutivas debe reemplazarse ε_{ij} por $e_{ij}^{s} = e_{ij} - e_{ij}^{T}$, es decir

$$e_{ij} - d_{ij}a\Delta T = \frac{1+n}{E}s_{ij} - d_{ij}\frac{3n}{E}s_{0} \tag{4.25}$$

o bien:

$$e_{ij} = \frac{1+n}{E} s_{ij} - d_{ij} \left(\frac{3n}{E} s_0 - a \Delta T \right) \qquad (4.26)$$

Invirtiendo esta última relación, en términos de los parámetros de Lamé, se obtiene:

$$s_{ij} = 2m e_{ij} + d_{ij} \left(l q - 3K a \Delta T \right) \qquad (4.27)$$

donde K es el módulo elástico volumétrico definido por (4.21).