1. ELEMENTOS DE TENSORES CARTESIANOS

1.1 Introducción:

Para describir entidades o variables físicas se requiere de valores o componentes. El número de componentes necesarias determina la naturaleza "tensorial" de la variable. Es así como en algunas de ellas basta una sola componente, caso en que las variables se denominan "escalares". Ejemplos de estas cantidades son la masa de un cuerpo, la distancia entre dos puntos, la temperatura, la energía, etc.

Hay otras variables que requieren 3 valores para quedar definidas, correspondiendo éstos a las componentes en un sistema coordenado del espacio tridimensional. Se les denomina "vectores" y como ejemplos típicos se pueden mencionar el desplazamiento, d_i, la velocidad, v_i, y la aceleración, a_i, de un punto de un cuerpo, con i=1, 2, 3.

Sin embargo las variables escalares y vectoriales no bastan para describir todas las entidades físicas, pues algunas de ellas, como veremos, requieren 9 componentes, con lo cual es necesario usar 2 índices (t_{ij}, por ejemplo), en que tanto i como j toman valores 1,2,3. Así, t_{ij} es equivalente a una matriz de 3x3 elementos.

La necesidad de describir cantidades físicas con 9 parámetros fue planteada por Voight al estudiar las propiedades de cristales[1]. Para ello definió el tensor de tensiones σ_{ij}, de donde proviene la palabra "tensor" usada para denominar genéricamente este tipo de cantidades. Para comprender por qué son necesarios 9 parámetros para definir el estado tensional en un punto de un cuerpo, considérese el cuerpo en equilibrio representado en la figura 1(a). En la figura 1(b) se muestra el cuerpo que queda a la izquierda al seccionar el cuerpo anterior por un plano paralelo al plano coordenado (1,3), que contenga al punto P. Para mantener el equilibrio de este trozo del cuerpo primitivo, es necesario aplicar fuerzas distribuidas en la superficie plana. Sobre una superficie muy pequeña ΔA que contenga al punto P, se puede considerar una fuerza uniforme por unidad de superficie, σ_{2i}, cuya resultante será $\Delta A\sigma_{2i}$ (el subíndice 2 indica que es un plano cuya normal tiene la dirección del eje coordenado 2, mientras i es el índice libre que define las 3 componentes del vector.

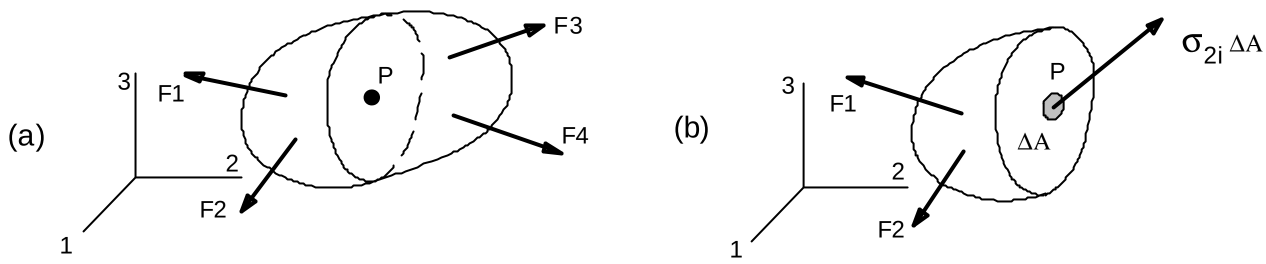

Figura 1.1 Definición de componentes de tensiones internas.

[1] Voigt, W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abh. Ges. Wiss. Göttingen, 34 (1887).

En igual forma, si se corta el cuerpo sucesivamente por planos cuyas normales tengan las direcciones de los ejes 1 y 3, se definirán tensiones s_{1i} y $s_{3i,}$ respectivamente.

Considerando ahora las tres direcciones, se concluye que se necesitan 9 componentes para describir el estado tensional del punto: 3 componentes para cada uno de los 3 vectores de tensiones correspondientes a los planos paralelos a los planos coordenados.

Pero ¿Describen totalmente el estados tensional estas nueve componentes? ¿Qué ocurre si seccionamos el cuerpo por un plano de dirección cualquiera, que contenga el punto P?. La tensión correspondiente será un nuevo vector, con sus 3 componentes. ¿Habrá entonces infinitas componentes del tensor?. La respuesta es no, pues, por equilibrio, las componentes para un plano cualquiera pueden expresarse en función de las 9 componentes de las direcciones coordenadas. En efecto, como se verá más adelante, si el plano es tal que su normal tiene cosenos directores ν_i, las componentes de tensión en esa dirección están dadas por:

$$s_{ni} = n_j s_{ij} \qquad (1.1)$$

donde σ_{ij} son las componentes de tensión para las direcciones coordenadas en un sistema cartesiano triortogonal.

Generalizando la idea de cantidades tensoriales, es posible agrupar las cantidades escalares, vectoriales y tensoriales propiamente tales bajo un solo concepto, definiendo tensores de distinto "orden". El "orden" corresponderá al número de índices requerido para definir la cantidad física. Así, los escalares pasan a ser tensores de orden 0, los vectores tensores de orden 1, y los tensores propiamente tales, tensores de orden 2. Por extensión, es posible definir matemáticamente tensores de orden 3 o de un orden cualquiera n.

1.2 Homogeneidad dimensional y tensorial de las leyes físicas.

Las leyes físicas, expresadas como una relación entre cantidades físicas que intervienen en un fenómeno, para que tengan validez universal deben cumplir con dos condiciones esenciales: a) Ser independientes del sistema de unidades de medición y b) ser independientes del sistema espacial de referencia.

Así, la ley de Newton $F = ma$, que relaciona la aceleración a de una partícula de masa m sometida a una fuerza F, es independiente del sistema de unidades de medición utilizado, sea éste MKS, SI o anglosajón. Se dice entonces que las relaciones físicas deben ser **dimensionalmente homogéneas**.

La relación $F = ma$, es de tipo escalar, pero si se consideran los vectores aceleración, a_i, y fuerza F_i, la ley toma la forma $F_i = m\, a_i$, en la cual intervienen las componentes de los vectores en un sistema coordenado de referencia. Estas componentes cambian de valor si se cambia el sistema de referencia, no así la ley física, que ha sido formulada independientemente de éste. Las componentes de los vectores deben cambiar, entonces, de tal forma que la ley $F_i = m\, a_i$ siga siendo válida. Ello ocurre si las componentes de los vectores satisfacen la ley de transformación de coordenadas que se verá más adelante.

En la misma forma, una ley física en que intervengan cantidades tensoriales $(s_{ij,j} + f_i =$ 0, por ejemplo) debe ser válida para cualquier sistema de referencia. Se define entonces una ley de transformación para cantidades tensoriales tal que la relación física continúa siendo válida al cambiar el sistema de referencia. Se dice en este caso que la relación física es **tensorialmente homogénea**. Esto constituye el fundamento de la definición de las cantidades tensoriales, como cantidades expresadas en componentes que satisfacen una cierta ley de transformación de coordenadas.

1.3 Leyes de transformación de tensores. Matriz de rotación.

Supongamos que las cantidades físicas han sido definidas respecto a un sistema de referencia cartesiano (1,2,3) y se quiere obtener sus componentes para un nuevo sistema cartesiano (1', 2',3'). Si la cantidad es un escalar, o tensor de orden 0, su valor no será alterado por la transformación. Si la cantidad en un vector, la ley de transformación es la que se formulará a continuación.

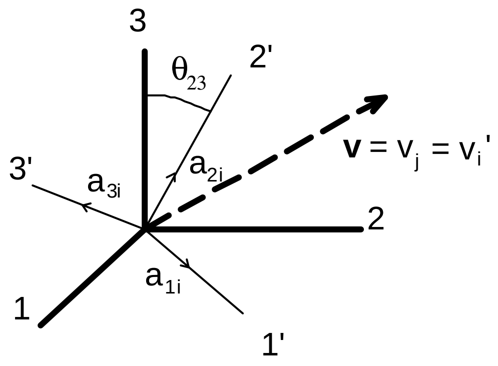

Figura 1.2 Rotación del sistema coordenado.
Elementos de la matriz de rotación **a**

Se define como **matriz de rotación** a_{ij}, del nuevo sistema (1',2',3') respecto al sistema primitivo (1,2,3), a una matriz de 3x3 cuyas componentes son los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto al sistema primitivo, vale decir, $a_{ij} = cos\ q_{ij}$, donde q_{ij} es el ángulo que forma el nuevo eje *i'* con el antiguo eje *j*. En la figura 1.2 se muestra q_{23}, por ejemplo.

Un vector $\boldsymbol{v}$ estará definido por ya sea las componentes v_j en el sistema primitivo o v'_j en el sistema nuevo. Para obtener las componentes en el nuevo sistema basta proyectar el vector sobre los nuevos ejes, lo cual se logra multiplicandolo escalarmente por los vectores unitarios que representan a los nuevos ejes, vale decir, por los vectores cuyos elementos son los cosenos directores de éstos. Así, la nueva componente i del vector (v'_i) estará dada por:

$$v_i' = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} v_j = a_{ij} v_j \qquad (1.2)$$

Se ha usado aquí la notación de Einstein, que dice; "Si en un monomio hay 2 índices iguales, el significado es la suma de los términos resultantes de dar a esos índices los valores 1, 2, 3".

La relación (1.2) representa la ley de transformación de un vector. La relación inversa, es decir, los valores de las componentes en el sistema original en función de las componentes nuevas es, evidentemente:

$$v_i = a_{ji} v_j^{'} \qquad (1.3)$$

puesto que la rotación inversa queda definida por la matriz transpuesta, a_{ij}^{t} (los ángulos entre los ejes son los mismos, pero el ángulo que antes llamábamos, por ejemplo, q_{23}, ahora se llama q_{32}).

1.4 Propiedades de la matriz de rotación

Dado que los nuevos ejes son también ortogonales entre si, el producto escalar de dos líneas de la matriz de rotación será nulo si se trata de líneas diferentes, o unitario si es la misma línea, vale decir:

$$a_{ik}\ a_{jk} = \left\{\begin{matrix} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{matrix}\right\} = d_{ij}\ (d \text{ de Kronecker}) \qquad (1.4)$$

Lo anterior significa que la inversa de la matriz de rotación es su transpuesta.

1.5 Ley de transformación de un tensor de orden 2

Para el caso de un tensor, t_{ij}, se define la siguiente ley de transformación de coordenadas

$$t'_{ij} = a_{ik}\ a_{jl}\ t_{kl} \qquad (1.5)$$

(doble sumatoria sobre k y sobre l, de acuerdo a la convención de Einstein).

Una cantidad t_{ij} será entonces un tensor si se transforma según la ley (1.5).

Como la matriz de rotación de la transformación inversa es la transpuesta, las componentes primitivas en función de las nuevas serán:

$$t_{ij} = a_{ki} a_{lj} t'_{kl} \qquad (1.6)$$

Por extensión, un tensor de cualquier orden será aquél en que sus componentes obedecen la siguiente ley de transformación de coordenadas

$$\boldsymbol{t}^{'}_{\boldsymbol{ijk}}\boldsymbol{...} = \boldsymbol{a}_{ia}\,\boldsymbol{a}_{jb}\,\boldsymbol{a}_{j_g}\ \boldsymbol{...t}_{abg}\ \boldsymbol{...} \qquad (1.7)$$

1.6 Invariancia del producto escalar

Sean dos vectores u_i, v_j. Se define el producto escalar como:

$$p = u_i v_i \qquad (1.8)$$

Usando la ley de transformación de un vector, se obtiene

$$p' = a_{ik}u_k a_{il}v_l = d_{kl}u_k v_l = p \qquad (1.9)$$

Luego, el producto escalar es invariante para una rotación de coordenadas.

1.7 Producto vectorial : símbolo de permutación

Para ciertas operaciones tensoriales es conveniente definir el llamado símbolo de permutación.

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{si cualquier índice está repetido} \\ 1, & \text{si (ijk) es permutación par de (123)} \\ -1, & \text{si (ijk) es permutación impar de (123)} \end{cases} \qquad (1.10)$$

Mediante este símbolo, dados dos vectores u_j , v_k el producto vectorial queda definido por :

$$p_i = e_{ijk}u_j v_k \qquad (1.11)$$

En forma desarrollada:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ p_2 &= u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ p_3 &= u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{aligned} \qquad (1.12)$$

1.8 Invariacia de la forma bilineal

Dados un tensor t_{ij} y dos vectores x_i, y_j, se define la forma bilineal $2F$ como:

$$2F = t_{ij}x_i y_j \qquad (1.13)$$

Esta expresión es lineal en x_i y en y_j, y es invariante para un transformación de coordenadas. En efecto, al encontrarnos en el nuevo sistema de referencia la expresión (1.13) toma la forma:

$$2F' = t'_{ij}x'_i y'_j \qquad (1.14)$$

pero usando las leyes de transformación de vectores y tensores se tiene:

$$2F' = a_{ik}a_{jl}t_{kl}a_{im}x_m a_{jn}y_n \qquad (1.15)$$

y aprovechando las propiedades de la matriz de rotación, finalmente se obtiene:

$$2F' = t_{mn}x_m y_n = 2F \qquad (1.16)$$

Es importante destacar que la manera de definir la transformación de vectores y tensores hace que la forma bilineal sea invariable. A la inversa si x_i , y_j son vectores y se impone la condición que la forma bilineal $t_{ij}\ x_i\ y_j$ sea invariante para cambios de sistemas coordenado, entonces t_{ij} es un tensor y debe satisfacer la ley de transformación de coordenadas (1.6).

1.9 Tensores simétricos y antimétricos

Un tensor t_{ij} es simétrico si $t_{ij} = t_{ji}$. En este caso hay sólo 6 componentes diferentes. La mayoría de los tensores que se verán más adelante son simétricos, como el tensor de tensiones s_{ij} y el tensor de deformaciones de Cauchy e_{ij}, por ejemplo. Ellos presentan una serie de características particulares que se estudiarán luego.

Al hacer una transformación de coordenadas la simetría se conserva, pues:

$$t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl} = a_{ik} a_{jl} t_{lk} = t'_{ji} \tag{1.17}$$

Por otra parte, un tensor t_{ij} es antimétrico si $t_{ij} = -t_{ji}$. Este tipo de tensores tiene sólo 3 componentes diferentes, ya que los términos de la diagonal principal deben ser nulos para que se cumpla la condición de antimetría.

Como un tensor antimétrico requiere de sólo 3 componentes diferentes, es posible definir el siguiente vector equivalente.

$$t_i = -\tfrac{1}{2} e_{ijk} t_{jk} \tag{1.18}$$

es decir:

$$t_i = \begin{Bmatrix} t_{32} \\ t_{13} \\ t_{21} \end{Bmatrix} \tag{1.19}$$

La relación inversa es:

$$t_{ij} = -e_{ijk} t_k \tag{1.20}$$

o bien

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Definiendo en esta forma el vector equivalente al tensor antimétrico, su aplicación sobre un vector v_j da por resultado el producto vectorial. En efecto $q_i = t_{ij} v_j = -e_{ijk} t_k v_j$ = $\boldsymbol{e_{ikj} t_k v_j}$ = producto vectorial entre t_k y v_j.

1.10 Propiedades de los tensores simétricos

1.10.1 Forma cuadrática. Representación gráfica de un tensor simétrico

Si en la forma bi-lineal de un tensor t_{ij} los vectores x_i, y_i (1.13) se considera dos veces el mismo vector x_i, y se toma en cuenta la simetría del tensor ($t_{ij} = t_{ji}$), entonces se obtiene la forma cuadrática

$$2F = t_{ij}x_i x_j = t_{11}x_1^2 + t_{22}x_2^2 + t_{33}x_3^2 + 2(t_{12}x_1x_2 + t_{23}x_2x_3 + t_{31}x_3x_1) \qquad (1.22)$$

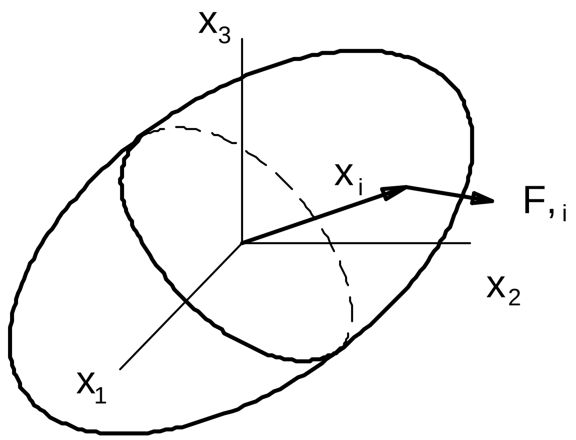

Figura 1.3 Representación gráfica de un tensor.

Considerando un espacio cartesiano tri-ortogonal en el cual las componentes de x_i son las coordenadas de un punto, entonces la expresión (1.22) representa una cuádrica centrada en el origen. Dadas las componentes del tensor y un valor de F, la superficie es única (figura 1.3).

Al hacer una rotación de ejes, como la expresión (1.22) debe conservar su valor, las componentes t_{ij} debe transformarse de acuerdo a la ley de cambio de sistemas coordenados de un tensor.

La gradiente de F es $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = F,_i$ (nueva notación para derivada parcial), es normal a la superficie de la cuádrica. Su expresión en términos de las componentes del tensor y del vector posición del punto de la superficie es

$$F_{,i} = t_{ij}x_j \qquad (1.23)$$

1.10.2 Direcciones y valores principales

El vector $F,_i$, que es normal a la superficie, formará en general un ángulo diferente de 0 con el vector posición del punto. Sin embargo, existen direcciones especiales para las cuales ambos vectores son colineales. Estas direcciones se denominan **principales**.

Matemáticamente la expresión anterior toma la forma

$$F_{,i} = t_{ij} x_j = l x_i = l d_{ij} x_j \tag{1.24}$$

donde l es un escalar de valor arbitrario.

Juntando los términos en un solo miembro, la expresión (1.24) se puede poner como

$$(t_{ij} - l d_{ij}) x_j = 0 \tag{1.25}$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneas (1.25) corresponden a las 3 **direcciones principales** buscadas. Los valores correspondientes de l son los **valores principales** y se obtienen de la condición para la existencia de soluciones no nulas, vale decir, el determinante del sistema de ecuaciones igual a cero (ecuación característica del tensor).

$$\left| t_{ij} - l\, d_{ij} \right| = -l^3 + l^2 I_1 - l I_2 + I_3 = 0 \tag{1.26}$$

donde

$$I_1 = t_{ii} = traza \quad del \quad tensor \tag{1.27a}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{33} & t_{13} \\ t_{13} & t_{11} \end{vmatrix} = t_{ii} t_{(i+1)(i+1)} - t_{i(i+1)}^{2} \tag{1.27b}$$

$$I_3 = e_{ijk} t_{1i} t_{2j} t_{3k} = \left| t_{ij} \right| \tag{1.27c}$$

A cada uno de los 3 valores principales $l_{i,}$ raíces de la ecuación (1.26), le corresponde una dirección principal.

1.10.3 Propiedades de las direcciones principales

La ecuación característica es un polinomio cúbico. Habrá, en consecuencia, a lo menos una raíz real. Su pongamos que ella sea λ_3 y que hacemos una rotación de coordenadas de tal manera que el eje 3 del sistema coordenado esté en la dirección principal 3. La forma del tensor para este sistema de ejes es

$$t_{ij} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{vmatrix} \tag{1.28}$$

En general, las direcciones de los ejes x_1 y x_2 no serán principales.

Haciendo ahora una rotación de ejes en torno a x_3 en un ángulo θ, como se muestra en la figura (1.4), la matriz de rotación correspondiente será:

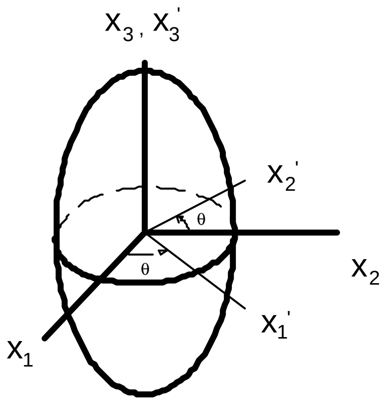

Figura 1.4 Direcciones principales

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.28}$$

Aplicando la ley de transformación del tensor (1.5), se obtienen las nuevas componentes del tensor

$$t'_{ij} = \begin{vmatrix} t_{11}\cos^2\theta + 2t_{12}sen\theta\cos\theta + t_{22}sen^2\theta & (t_{22} - t_{11})sen\theta\cos\theta + t_{12}(\cos^2\theta - sen^2\theta) & 0 \\ sim & t_{11}sen^2\theta - 2t_{12}sen\theta\cos\theta + t_{22}\cos^2\theta & 0 \\ sim & sim & \lambda_3 \end{vmatrix} \tag{1.29}$$

Es conveniente expresar (1.29) en función del ángulo doble, a través de las relaciones

$$sen^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \tag{1.30a}$$

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \tag{1.30b}$$

$$2\,\mathrm{sen}\theta\,\cos\theta = \mathrm{sen}\,2\theta \tag{1.30c}$$

con lo cual el tensor toma la forma

$$t'_{ij} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \tfrac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\cos 2\theta + t_{12}sen2\theta & t_{12}\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}(t_{11} - t_{22})sen2\theta & 0 \\ sim & \tfrac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - \tfrac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\cos 2\theta - t_{12}sen2\theta & 0 \\ sim & sim & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

Una nueva dirección principal es aquélla en que el nuevo término de fuera de la diagonal principal, t'_{12}, se anula. Ello ocurre cuando el ángulo de rotación del sistema coordenado cumple la relación

$$\tan 2q = \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} \tag{1.32}$$

La ecuación (1.32) tiene soluciones $q_0 + np/2$, es decir, soluciones que difieren en 90º entre si. Se puede concluir entonces que el problema de determinar las direcciones principales de un tensor tiene tres soluciones perpendiculares entre si. Además, la cuádrica correspondiente es un elipsoide de semi-ejes $\sqrt{\frac{2F}{l_i}}$, pues los valores principales son reales.

Sea $t_i = \lambda_i$, es decir, la forma canónica de **t.** Entonces las invariantes del tensor son

$$\begin{aligned} I_1 &= t_1 + t_2 + t_3 \\ I_2 &= t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 \\ I_3 &= t_1 t_2 t_3 \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.10.4 Círculo de Mohr.

Otto Mohr propuso representar gráficamente la transformación bi-dimensional anterior mediante un círculo con centro en el eje de las abscisas a una distancia $\frac{1}{2}(t_1 - t_2)$, como se muestra en la figura (1.5).

Los puntos del círculo dan los valores de las componentes del tensor bi-dimensional.

Las nuevas componentes, luego de una rotación de ejes en un ángulo θ, se obtienen moviéndose sobre el círculo en un ángulo igual a 2θ.

Los puntos de cruce del círculo con el eje de las abscisas corresponden a las direcciones principales y dan los valores principales $l_1 = t_1$ y $l_1 = t_2$. Puede verse que éstos corresponden a los valores máximos y mínimo de los elementos de la diagonal del tensor.

En efecto

$$\begin{aligned} t'_{11} = OC + OD &= \tfrac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + r\cos(2q_0 - 2q) \\ &= \tfrac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + r\cos 2q_0 \cos 2q + r sen 2q_0 sen 2q \\ &= \tfrac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \tfrac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\cos 2q + t_{12} sen 2q \end{aligned} \tag{1.34}$$

(r = radio del círculo)

$$\begin{aligned} t'_{12} = BD &= r\, sen(2q_0 - 2q) = r sen 2q_0 \cos 2q - r\cos 2q_0 sen 2q \\ &= t_{12}\cos 2q - \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) sen 2q \end{aligned} \tag{1.35}$$

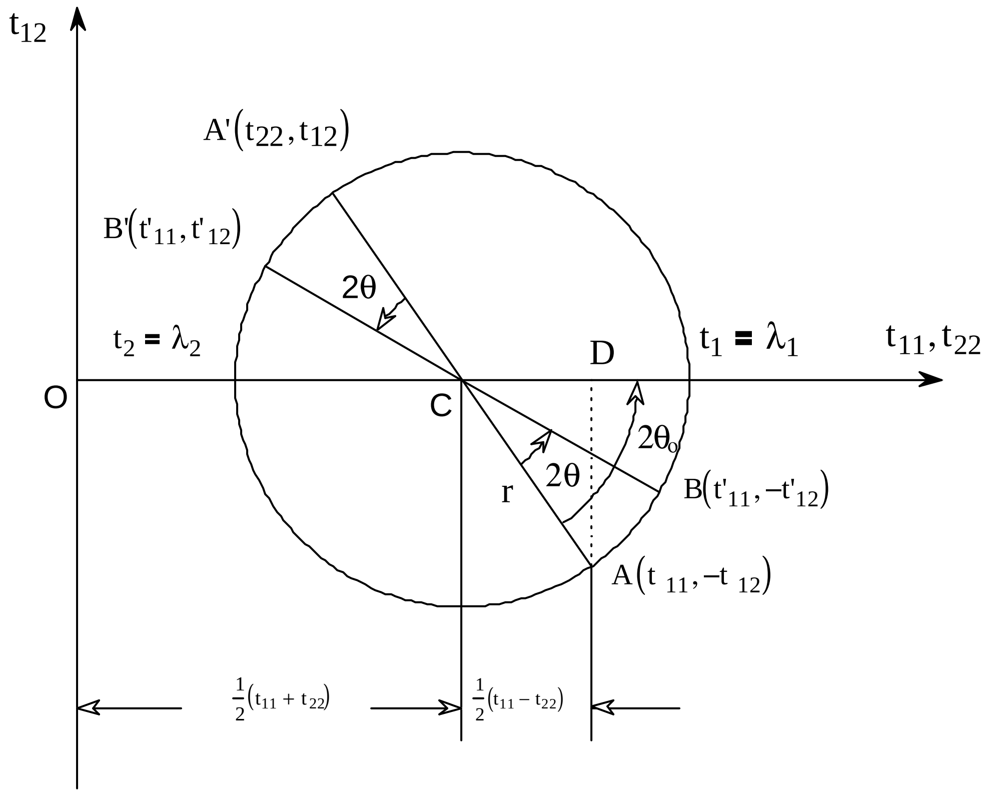

Figura 1.5 Círculo de Mohr

1.10.5 Direcciones principales como aquéllas en que los elementos de la diagonal toman valores extremos.

El problema de direcciones principales puede también plantearse como la obtención de las direcciones para las cuales los elementos de la diagonal principal del tensor toman valores extremos. En otras palabras, supongamos que se quiere obtener una componente de la diagonal principal del tensor para una nueva dirección coordenada dada por el vector unitario x_i ($x_i\ x_i = d_{ij}\ x_i\ x_j = 1$). Las componentes de x_i corresponden a los términos de la matriz de rotación del nuevo eje correspondiente (sea el nuevo eje k), ya que es unitario. Entonces la nueva componente de la diagonal vale:

$$t'_{kk} = x_i x_j t_{ij} \qquad (\text{sin } \textit{suma sobre } k) \tag{1.36}$$

Se desea obtener los valores de x_i para que t'_{kk} sea máximo o mínimo bajo la condición $d_{ij} x_i x_j = 1$. Esto es equivalente, usando los multiplicadores de Lagrange, a obtener el máximo o mínimo del problema modificado

$$F(x_i, l) = t_{ij} x_i x_j - l\,(d_{ij} x_i x_j - 1), \text{ sin condiciones} \tag{1.37}$$

Estas direcciones corresponden a aquellas en que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = t_{ij} x_j - l\, d_{ij} x_j = 0 \tag{1.38a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = d_{ij} x_i x_j - 1 = 0 \tag{1.38b}$$

las cuales conducen al problema de valores principales (1.25). En resumen, en las direcciones principales los valores de la diagonal principal toman valores extremos.