

## 2. EL TENSOR DE TENSIONES

Como se explicó previamente, el estado tensional en un punto interior de un cuerpo queda definido por 9 componentes, correspondientes a 3 componentes por cada una de las 3 tensiones internas (vectoriales) que resultan al cortar el cuerpo por planos paralelos, sucesivamente, a los 3 planos coordenados. Luego se verá que las componentes diferentes son sólo 6, pues el tensor debe ser simétrico para que se cumplan las ecuaciones de equilibrio de fuerzas.

### 2.1 Tensiones internas, hipótesis de Euler-Cauchy

Supongamos un cuerpo sometido a fuerzas externas en equilibrio y un punto P en su interior.

Si se corta este cuerpo por un plano de normal  $\hat{n}$  que pase por el punto P, se puede aislar uno de los trozos resultantes, como se muestra en la figura (2.1). Para que se mantenga el equilibrio de este cuerpo, deben agregarse fuerzas externas sobre la superficie plana de la sección.

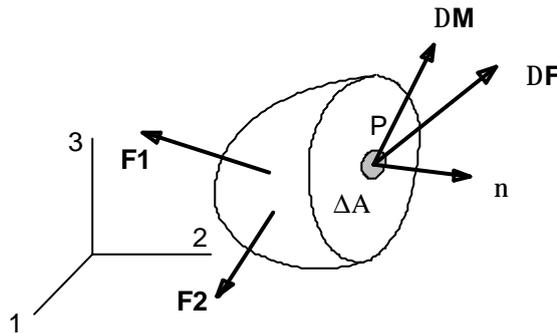


Figura 2.1 Tensión en un Punto

Consideremos ahora las fuerzas resultantes sobre una pequeña superficie de esta sección, que contenga el punto P y cuya área sea  $\Delta A$ . Estas fuerzas, reducidas al punto P, valen  $\Delta F_i$ , y el momento resultante correspondiente,  $\Delta M_i$ .

La hipótesis de Euler – Cauchy establece que

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A} = s_{ni} \quad (\text{tensión en el punto para el plano de dirección } \hat{n}) \quad (2.1)$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M_i}{\Delta A} = 0 \quad (2.2)$$

## Fuerzas Volumétricas

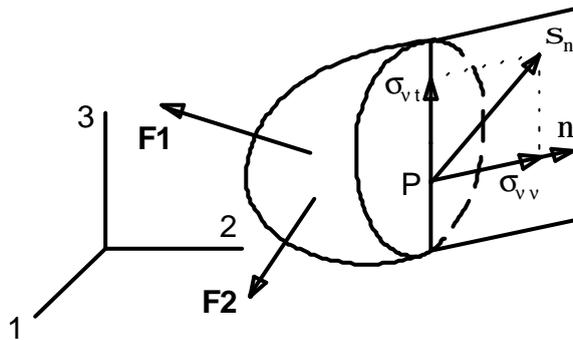
Suponiendo que existen fuerzas externas que actúan en el interior del cuerpo (fuerzas de gravedad por ejemplo), la resultante de estas fuerzas para un pequeño volumen que contengan el punto P,  $\Delta V$ , y el correspondiente momento, reducidos al punto P, satisfacen la condición.

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{DF_i}{\Delta V} = f_i \quad (\text{fuerza volumétrica por unidad de volumen}) \quad (2.3)$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{DM_i}{\Delta V} = 0 \quad (2.4)$$

### 2.2 Componente normal y tangencial de la tensión

La figura 2.2 muestra un cuerpo en equilibrio que ha sido seccionado por un plano de normal unitaria  $n$  que contiene un punto P interior del cuerpo. Considerando el plano formado por el vector normal y el vector de tensión en el punto,  $S_{ni}$ , éste intercepta al plano según una línea perpendicular a  $v_i$ , denominada “tangente”. Es común descomponer la tensión  $S_{ni}$ , en dos componentes, una según la normal y otra según esta última dirección,  $t$ , que se denomina “tangente”.



**Figura 2.2** Componentes normal y tangencial de tensión

Las componentes de este sistema de referencia están dadas por:

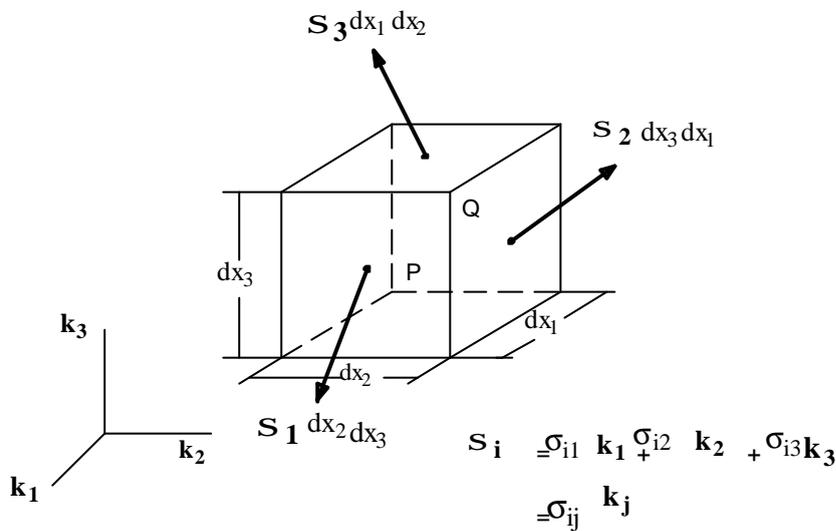
$$S_v = S_{vv} \hat{n} + S_{vt} \hat{t} \quad (2.5)$$

donde:

$S_{nn}$  = componente normal  
 $S_{nt}$  = componente tangencial.

### 2.3 Componentes cartesianas de tensiones

Consideremos un punto  $P(x_i)$  en el interior de un cuerpo en equilibrio. Por dicho punto se pueden pasar 3 planos paralelos a los planos coordenados (cuyas normales serán los vectores unitarios  $k_1, k_2, k_3$ , respectivamente). Por un punto  $Q(x_i + dx_i)$ , cercano a P, se pueden pasar otros 3 planos, también paralelos a los planos coordenados. La intersección de estos 6 planos forman un paralelepípedo recto, como se muestra en la figura 2.3.



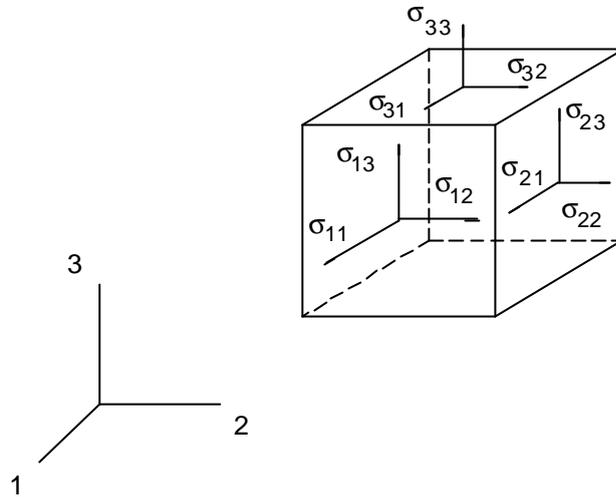
**Figura 2.3** Componentes vectoriales de tensiones

En cada cara del paralelepípedo habrá una tensión, que se puede denominar de acuerdo al número del vector normal a la cara. Así, la cara cuya normal es el vector  $k_i$  tendrá una tensión  $S_i$ . A su vez, este vector puede expresarse según las componentes en el sistema cartesiano como:

$$S_i = S_{ij} \hat{k}_j \tag{2.6}$$

Las componentes  $\sigma_{ij}$  forman un tensor, como se demostrará luego. El primer índice señala el plano sobre el cual actúa la tensión y el segundo la dirección de la componente.

En la figura 2.4 se muestran las componentes de tensiones en caras positivas. Evidentemente, en las caras negativas las componentes de tensiones tienen las direcciones opuestas.

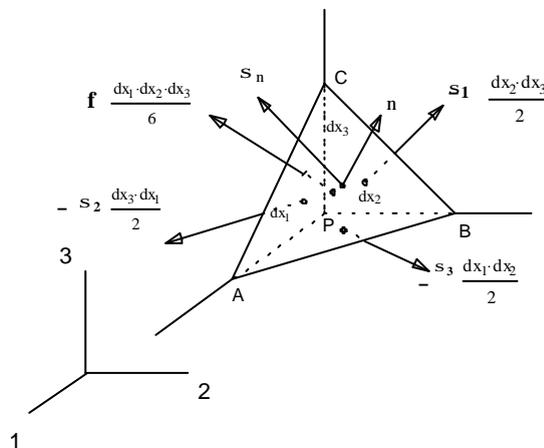


**Figura 2.4** Convención de signos para las componentes de tensiones

#### 2.4 Tensión en una dirección cualquiera en función de $s_{ij}$

En un punto interior de un cuerpo en equilibrio existe un estado tensional definido por las componentes del tensor de tensiones  $s_{ij}$ . Estas componentes son suficientes, como se verá a continuación, para definir por completo el estado tensional en el punto, pues la tensión en un plano cualquiera de normal  $v_i$  puede obtenerse en función de ellas.

En efecto, consideremos el equilibrio del tetraedro PABC de la figura 2.5, formado por tres planos paralelos a los planos coordenados que contienen al punto P y un plano oblicuo, de normal  $v_i$ , ligeramente desplazado respecto del punto P.



**Figura 2.5** Tensión en la dirección  $n$

Como el tetraedro está en equilibrio ante las fuerzas externas, la suma total de fuerzas debe ser nula, es decir:

$$-s_1 \frac{dx_2 dx_3}{2} - s_2 \frac{dx_3 dx_1}{2} - s_3 \frac{dx_1 dx_2}{2} + s_n dA + f \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{6} = 0 \quad (2.7)$$

Cuando  $dx_1$ ,  $dx_2$  y  $dx_3$  tienden a 0, el término con la fuerza de volumen  $f$  desaparece. Además, si la expresión (2.7) se divide por  $dA$  y se toma en cuenta que la proyección del área del triángulo ABC sobre uno de los planos coordenados, el plano de normal  $\mathbf{k}_1$  por ejemplo, vale:

$$dAn \cdot \mathbf{k}_1 = dAn_1 = \frac{dx_2 dx_3}{2} \quad (2.8)$$

se obtiene

$$-s_1 n_1 - s_2 n_2 - s_3 n_3 + s_n = 0 \quad (2.9)$$

es decir:

$$s_n = n_k s_k \quad (2.10)$$

o bien, es componentes

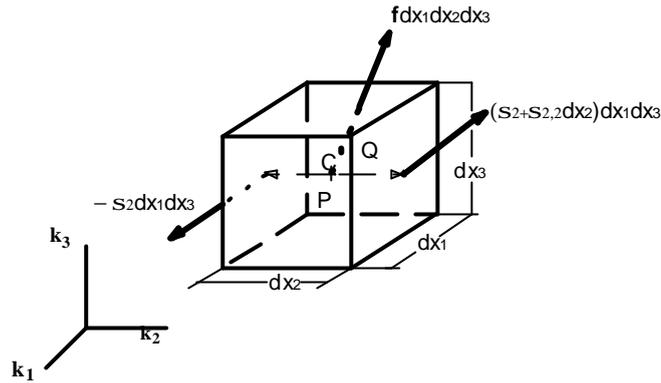
$$s_{ni} = n_k s_{ki} \quad (2.11)$$

La relación (2.11) muestra que las 9 componentes de tensiones respecto al sistema coordenado son suficientes para obtener las tensiones en cualquier dirección. Luego se verá que el tensor  $s_{ij}$  es simétrico, de manera que el número de componentes independientes es sólo 6.

## 2.5 Ecuaciones de Equilibrio

Las componentes de tensiones en un punto de un cuerpo no son independientes entre si, pues deben satisfacerse las condiciones de equilibrio en cualquier pedazo del cuerpo. Infinitesimalmente ello se traduce en ecuaciones diferenciales de equilibrio. Se dice entonces que las componentes de tensiones deben ser estáticamente admisibles, es decir, satisfacer las ecuaciones diferenciales de equilibrio.

Consideremos un paralelepípedo infinitesimal, como se aprecia en la figura, 2.6, cuyas cara sean paralelas a los planos coordenados.



**Figura 2.6** Formulación de las ecuaciones de equilibrio

Como el cuerpo es muy pequeño, se puede suponer que las tensiones sobre cada una de sus caras y la fuerza externa por unidad de volumen son uniformes dentro de él, de manera que sus resultantes están aplicadas en el centro de gravedad de, ya sea, cada cara o el volumen.

Considerando, por simplicidad, sólo las fuerzas sobre las caras tipo 2, se obtiene como resultante:

$$-s_2 dx_1 dx_2 + s_2 dx_1 dx_2 + s_{2,2} dx_1 dx_2 dx_3 = s_{2,2} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.12)$$

Luego, si se considera los tres tipos de caras del cuerpo, el resultado es:

$$s_{i,i} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.13)$$

La ecuación de equilibrio de fuerzas sobre el paralelepípedo, incluyendo las fuerzas volumétricas, será en consecuencia:

$$s_{i,i} dx_1 dx_2 dx_3 + f dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (2.14)$$

o bien

$$s_{i,i} + f = 0 \quad (2.15)$$

En componentes:

$$s_{ij,i} + f_j = 0 \quad (2.16)$$

Las relaciones (2.16) son las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, pero también debe satisfacerse las ecuaciones de equilibrio de momentos. Para ello consideremos el momento de todas las fuerzas externas con respecto al centro de gravedad del cuerpo, C. Como la resultante de las fuerzas de volumen pasa por el punto, ella no contribuye a esta relación.

Para las fuerzas en las caras tipo 2, se tiene:

$$\left(-k_2 \frac{dx_2}{2}\right) \times (-s_2 dx_1 dx_3) + \left(k_2 \frac{dx_2}{2}\right) \times (s_2 + s_{2,2} dx_2) dx_1 dx_2 \quad (2.17)$$

Cuando las aristas del paralelepípedo tienden a cero, el término que contiene a  $s_{2,2}$  desaparece y la expresión anterior se transforma en:

$$k_2 \times s_2 dx_1 dx_2 dx_3 \quad (2.18)$$

Considerando los 3 tipos de caras y dividiendo por  $dx_1 dx_2 dx_3$ , se obtiene:

$$e_{ijk} d_{ij} s_{ik} = 0 \quad (2.19)$$

es decir:

$$e_{ijk} s_{jk} = 0 \quad (2.20)$$

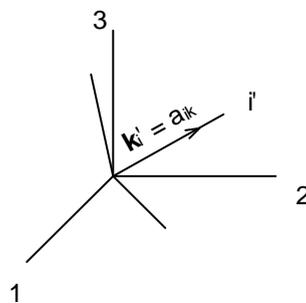
Esta última expresión es equivalente a:

$$s_{jk} = s_{kj} \quad (2.21)$$

es decir, el tensor de tensiones es simétrico.

## 2.6 Las componentes de tensión forman un tensor

Se ha mencionado anteriormente al tensor de tensiones sin demostrar que realmente sus componentes cumplen la ley de transformación de un tensor. Para demostrarlo consideremos la expresión (2.10), que da las componentes de la tensión para una dirección cualquiera  $v_k$ , en función de las componentes de tensiones, es decir,  $S_n = n_k S_k$ .



**Figura 2.7** El tensor de tensiones es un tensor

Si el vector  $v_k$  es reemplazado por el vector  $a_{ik}$ , que es un vector unitario en la dirección del nuevo eje  $i'$ , se obtiene la tensión correspondiente a esa nueva dirección

$$S_i' = a_{ik} S_k$$

Las componentes de este vector están referidas al sistema primitivo, de manera que para obtener las componentes referidas al nuevo sistema se debe hacer la transformación de coordenadas correspondiente, con lo que se obtiene

$$S_{ij}' = a_{jl} a_{ik} S_{kl} \quad (2.22)$$

La expresión (2.22) corresponde a la ley de transformación de un tensor, lo cual demuestra que las componentes de tensiones forman un tensor.

## 2.7 Elipsoide de Lamé

Lamé propuso una interesante forma de representación gráfica del tensor de tensiones a través de un elipsoide. Supongamos que los ejes del sistema coordenado se eligen de manera tal que coincidan con las direcciones principales del tensor de tensiones del punto que se quiere estudiar. Entonces el tensor tiene forma canónica, con las tensiones principales en la diagonal ( $\sigma_i$ ) y elementos nulos fuera de ésta.

Si se desea conocer el vector de tensión para un plano de dirección cualquiera de normal  $v_k$ , aplicando la relación (2.11) se obtiene:

$$S_{ni} = n_k S_{ki} = n_i S_i \quad (\text{sin suma sobre } i) \quad (2.23)$$

$$\text{Además, se tiene que } v_k v_k = 1 \text{ (vector unitario)} \quad (2.24)$$

De la relación (2.23) se puede obtener  $n_i = \frac{S_{ni}}{S_i}$  y reemplazar en (2.24), con lo cual resulta:

$$\left( \frac{S_{n1}}{S_1} \right)^2 + \left( \frac{S_{n2}}{S_2} \right)^2 + \left( \frac{S_{n3}}{S_3} \right)^2 = 1 \quad (2.25)$$

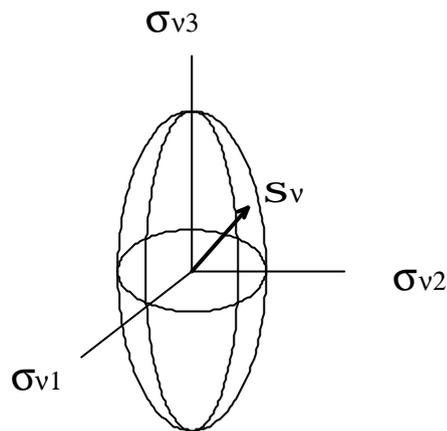
La relación (2.25) representa la ecuación de un elipsoide en el espacio ( $\sigma_{v1}, \sigma_{v2}, \sigma_{v3}$ ) cuyos semi-diámetros tienen los valores  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Además, si  $A_1, A_2, A_3$  son las áreas de las elipses principales y  $V$  es el volumen del elipsoide, las invariantes principales valen:

$$I_1 = s_1 + s_2 + s_3 = \text{suma de los semi diámetros} \quad (2.26)$$

$$I_2 = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 = \frac{1}{p}(A_1 + A_2 + A_3) \quad (2.27)$$

$$I_3 = s_1 s_2 s_3 = \frac{3}{4p}V \quad (2.28)$$



**Figura 2.8** Elipsoide de Lamé

## 2.8 Tensiones tangenciales máximas

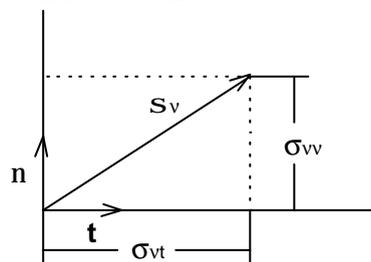
Dado un estado tensional en un punto de un cuerpo ¿en qué direcciones se producen las máximas componentes tangenciales de tensiones y cuanto valen éstas?.

Si se hacen coincidir los ejes coordenados con las direcciones principales de tensiones en el punto, la tensión en una dirección cualquiera  $v_i$  es:

$$s_{ni} = n_i s_i \quad (2.29)$$

cuya proyección sobre la normal al plano vale

$$s_{nn} = n_k s_{nk} = n_k^2 s_k \quad (2.30)$$



**Figura 2.9** Tensiones tangenciales

Usando el teorema de Pitágoras se puede obtener el cuadrado de la componente tangencial en términos de  $\sigma_i$  y  $v_i$ .

$$s_{n_t}^2 = |s_n|^2 - s_{n_n}^2 \quad (2.31)$$

pero

$$|s_n|^2 = s_{nk} s_{nk} = n_k^2 s_k^2$$

luego

$$\begin{aligned} s_{n_t}^2 &= n_k^2 s_k^2 - (n_k^2 s_k)^2 \\ &= n_1^2 s_1^2 + \dots - (n_1^2 s_1 + \dots)^2 \\ &= n_1^2 s_1^2 + \dots - (n_1^4 s_1^2 + \dots + 2n_1^2 n_2^2 s_1 s_2 + \dots) \\ &= n_1^2 (1 - n_1^2) s_1^2 + \dots - 2(n_1^2 n_2^2 s_1 s_2 + \dots) \end{aligned} \quad (2.32)$$

como

$$1 - n_1^2 = n_2^2 + n_3^2 \quad (2.33)$$

se tiene que

$$s_{n_t}^2 = n_1^2 n_2^2 (s_1 - s_2)^2 + \dots \quad (2.34)$$

o bien

$$s_{n_t}^2 = n_i^2 n_{i+1}^2 (s_i - s_{i+1})^2, \text{ en que } i+1 = 1 \text{ cuando } i = 3 \quad (2.35)$$

Los valores extremos de  $s_{n_t}$  coincidirán con los de  $s_{n_t}^2$ , de manera que el problema que debe resolverse es:

Determinar  $v_i$  tal que

$$s_{n_t}^2 = n_i^2 n_{i+1}^2 (s_i - s_{i+1})^2 \quad (2.36)$$

sea máximo o mínimo, con la condición  $n_k n_k = 1$

Este problema, de máximo o mínimo condicionado, se puede transformar en un problema de máximo o mínimo sin condiciones usando el concepto de los multiplicadores de Lagrange, de la siguiente forma:

“Determinar  $v_i$  y  $\lambda$  de manera que:

$$F(\mathbf{n}_i, I) = \mathbf{s}_{nt}^2 - I(\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k - 1) = \mathbf{n}_i^2 \mathbf{n}_{i+1}^2 (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i+1})^2 - I(\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k - 1) \quad (2.37)$$

sea máximo o mínimo”

La solución está dada por :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}_i} = \frac{\partial F}{\partial I} = 0 \quad (2.38)$$

Resulta así el siguiente sistema de ecuaciones no lineales cuyas soluciones resuelven el problema planteado:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2^2 (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)^2 + \mathbf{n}_3^2 (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_3)^2 - I &= 0 \\ \mathbf{n}_3^2 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3)^2 + \mathbf{n}_1^2 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)^2 - I &= 0 \\ \mathbf{n}_1^2 (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1)^2 + \mathbf{n}_2^2 (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_2)^2 - I &= 0 \\ \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Las soluciones, que son 18, se encuentran en la Tabla 2.1.

Las 6 primeras soluciones corresponden a las direcciones principales, en las cuales las tensiones tangenciales son nulas. Las últimas 12 soluciones son las que interesan; ellas corresponden a planos que contienen una dirección principal y forman ángulos de  $45^\circ$  con las otras dos direcciones principales. Además, los valores extremos son iguales a la mitad de la diferencia de los valores principales, es decir, de las tensiones normales máximas o mínimas correspondientes al estado tensional.

Es interesante comparar estos resultados con el caso plano, en el cual la transformación se puede representar mediante el círculo de Mohr (1.10.4). En ese caso el valor máximo de la

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$\lambda$	$ s_{nt} $	$ s_{nn} $
$\pm 1$	0	0	0	0	$ s_1 $
0	$\pm 1$	0	0	0	$ s_2 $
0	0	$\pm 1$	0	0	$ s_3 $
$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}(s_1 - s_2)^2$	$\frac{1}{2} s_1 - s_2 $	$\frac{1}{2} s_1 + s_2 $
0	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}(s_2 - s_3)^2$	$\frac{1}{2} s_2 - s_3 $	$\frac{1}{2} s_2 + s_3 $
$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}(s_3 - s_1)^2$	$\frac{1}{2} s_3 - s_1 $	$\frac{1}{2} s_3 + s_1 $

} 6 soluciones

} 12 soluciones

**Tabla 2.1** Soluciones para las tensiones de corte máximas

tensión tangencial es el radio del círculo, vale decir,  $\frac{1}{2}(s_1 - s_2)$ , y el correspondiente valor de la componente normal es la coordenada del centro del círculo,  $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ . Además, los puntos de máxima tensión tangencial se encuentran a  $90^\circ$  del eje de las abscisas, lo que corresponde a  $45^\circ$  de las direcciones principales.

## 2.9. Diagrama de Mohr en 3 dimensiones

Es posible, también, obtener un diagrama similar al círculo de Mohr para las tensiones en 3 dimensiones. En este caso se obtienen 3 círculos los cuales fijan las fronteras del espacio de valores posibles.

Como se ha visto, en coordenadas principales se tiene

$$s_{nn} = n_1^2 s_1 + n_2^2 s_2 + n_3^2 s_3 \quad (2.40)$$

$$s_{nn}^2 + s_{nt}^2 = |\bar{s}_n|^2 = n_1^2 s_1^2 + n_2^2 s_2^2 + n_3^2 s_3^2$$

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

De este sistema de ecuaciones se puede despejar  $n_1^2$ ,  $n_2^2$ ,  $n_3^2$  en función de  $s_{nn}$ ,  $s_{vt}$ , y  $s_i$ . Se obtiene:

$$n_i^2 = \frac{s_{nt}^2 + (s_{nn} - s_{i+1})(s_{nn} - s_{i+2})}{(s_i - s_{i+1})(s_i - s_{i+2})} \quad (2.41)$$

Supongamos que las tensiones principales se ordenan de tal manera que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Entonces la expresión (2.41) se puede interpretar de la siguiente manera:

- Para  $i = 1$ , el denominador es positivo, lo cual significa que el numerador también es positivo, pues  $n_1^2$  es, obviamente, positivo.

Entonces los puntos del espacio posible en el sistema coordenado  $(\sigma_{vv}, \sigma_{vt})$  son aquéllos que están fuera del círculo de ecuación:

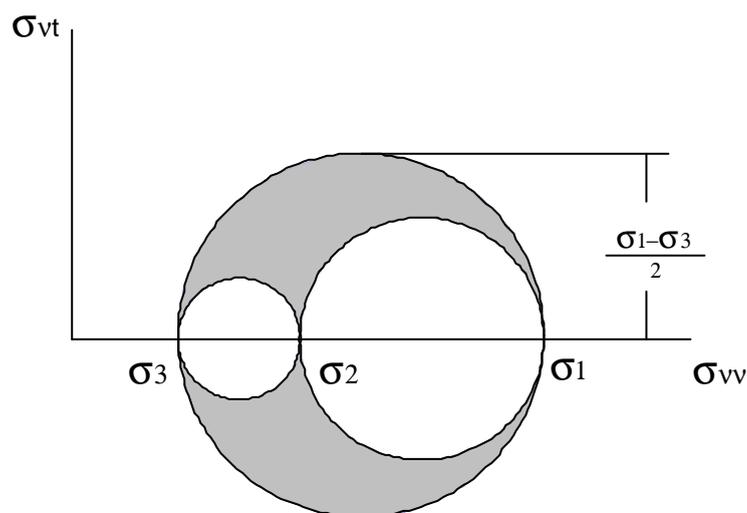
$$s_{nt}^2 + (s_{nn} - s_2)(s_{nn} - s_3) = 0 \quad (2.42)$$

- Con idéntico razonamiento, considerando  $i = 2$ , e  $i = 3$  respectivamente, los puntos posibles deben estar dentro del círculo de ecuación (2.43) y fuera del círculo de ecuación (2.44):

$$s_{nt}^2 + (s_{nn} - s_3)(s_{nn} - s_1) = 0 \quad (2.43)$$

$$s_{nt}^2 + (s_{nn} - s_1)(s_{nn} - s_2) = 0 \quad (2.44)$$

La situación anterior se ha representado en la figura 2.10.



**Figura 2.10** Círculos de Mohr en 3 dimensiones

## 2.10 Tensiones de desviación

Se define el siguiente tensor de desviación:

$$\mathbf{s}_{ij}^d = \mathbf{s}_{ij} - d_{ij} \mathbf{s}_0 \quad (2.45)$$

con:

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_{kk} / 3 = \textit{tensión media}$$

Es decir, la tensión  $\sigma_{ij}$  se ha dividido en dos términos, una componente esférica o hidrostática,  $d_{ij} \mathbf{s}_0$ , y una componente de desviación respecto a la situación hidrostática,

$$\mathbf{s}_{ij}^d.$$

El tensor de desviación es importante en la teoría de plasticidad. Tiene la particularidad de que su primera invariante es siempre nula (tensión normal media = 0). Además, es fácil demostrar que su segunda y tercera invariantes, en términos de las invariantes de  $\sigma_{ij}$  y de  $\sigma_0$ , están dadas por:

$$I_2^d = I_2 - 3\mathbf{s}_0^2 \quad (2.46)$$

$$I_3^d = I_3 - I_2 \mathbf{s}_0 + 2\mathbf{s}_0^3 \quad (2.47)$$