

MÉTODOS NUMÉRICOS DE SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CARACTERÍSTICAS

El método más simple es el método explícito de diferencias finitas.

Tenemos:

$$C^+ : \frac{dh}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} + \frac{a}{g} f \frac{|v|v}{2\Delta} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v + a \quad (2)$$

$$C^- : \frac{dh}{dt} - \frac{a}{g} \frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} - \frac{a}{g} f \frac{|v|v}{2\Delta} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = v - a \quad (4)$$

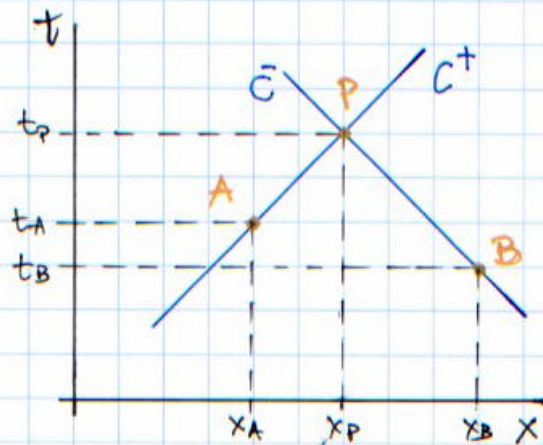
En tuberías, la celeridad de la onda de presión es mucho mayor que la velocidad del flujo: $a \gg v$, por lo que las ecuaciones (2) y (4) se reducen a:

$$(2) : \frac{dx}{dt} = a \quad (5)$$

$$(4) : \frac{dx}{dt} = -a \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) definen trayectorias de ondas de presión. Como a depende de las características del fluido y la tubería, es constante, por lo que las trayectorias son líneas rectas.

En un plano $x-t$:

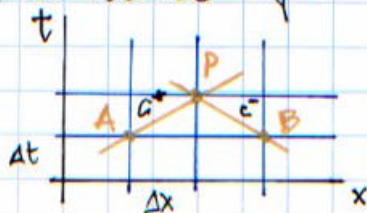


A lo largo de la trayectoria definida por $dx/dt = a$, el comportamiento de H y v está dado por la Ec(1). Del mismo modo, a lo largo de la trayectoria definida por $dx/dt = -a$, la Ec(3) define el comportamiento de H y v .

Lo que sucede en la posición x_P en el tiempo t_P (punto P), se debe a la interacción de dos perturbaciones: una que salió de la posición x_A en el tiempo t_A y que siguió la trayectoria definida por $dx/dt = a$, y de otra perturbación que en el tiempo t_B salió de la posición x_B y que se movió según $dx/dt = -a$.

En el método de diferencias finitas, las derivadas se aproximan a diferencias $\frac{d}{dt} \approx \frac{\Delta}{\Delta t}$.

Es claro que la discretización se simplifica si se hace que se cumpla $\Delta x = a \Delta t$!



El objetivo es conocer H y v en el punto P, conocidos H y v en los puntos A y B.

En el método explícito, v_{sent} y $f|v|v|$ se evalúan en los puntos A y B.

Evaluemos los derivadas de las Ecs. (1) y (3):

$$C^+: \quad \frac{dH}{dt} \approx \frac{H_P - H_A}{\Delta t}, \quad \frac{dv}{dt} \approx \frac{v_P - v_A}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = a$$

Reemplazando en Ec. 1:

$$C^+ \Rightarrow H_P - H_A + \frac{a}{g}(v_P - v_A) + v_A \text{sent} \Delta t + \frac{a}{g} \frac{f_A v_A |v_A|}{2D} \Delta t = 0 \quad (7)$$

$$C^-: \quad \frac{dH}{dt} \approx \frac{H_P - H_B}{\Delta t}, \quad \frac{dv}{dt} \approx \frac{v_P - v_B}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -a$$

Reemplazando en Ec. 3:

$$C^- \Rightarrow H_P - H_B - \frac{a}{g}(v_P - v_B) + v_B \text{sent} \Delta t - \frac{a}{g} \frac{f_B v_B |v_B|}{2D} \Delta t = 0 \quad (8)$$

(Ec. (7) + Ec. (8))/2 permite obtener H_P :

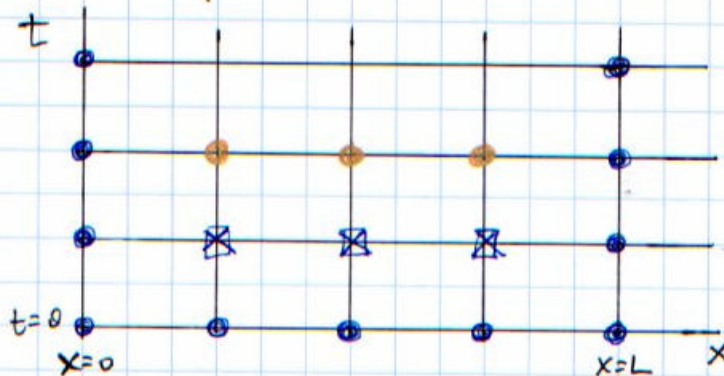
$$H_P = \frac{1}{2} \left[H_A + H_B + \frac{a}{g}(v_A - v_B) - (v_A + v_B) \text{sent} \Delta t - \frac{a}{2gD} (f_A v_A |v_A| - f_B v_B |v_B|) \right] \quad (9)$$

(Ec. (7) - Ec. (8))/2 permite obtener v_P :

$$v_P = \frac{1}{2} \left[\frac{g}{a}(H_A - H_B) + v_A + v_B + \frac{g}{a}(v_B - v_A) \text{sent} \Delta t - \frac{\Delta t}{2D} (f_A v_A |v_A| + f_B v_B |v_B|) \right] \quad (10)$$

Las Ecs. (9) y (10) permiten obtener H y v en cualquier punto del espacio-tiempo al que lleguen las ecuaciones características: C^+ y C^- .

Forma de proceder:

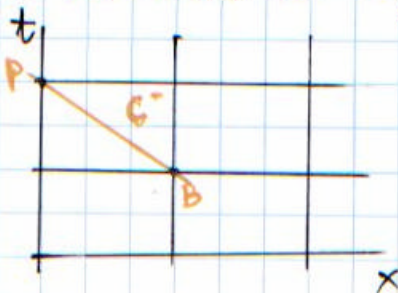


- : Condiciones de borde e inicial (conocidos)
- ⊗ : Se calculan en el primer Δt a partir de ●
- : Se calculan a partir de dos ⊗, excepto en los puntos contiguos a $x=0$ y $x=L$ (condiciones de borde), donde se calculan a partir de un ⊗ y un ●

CONDICIONES DE BORDE

En los extremos de aguas arriba ($x=0$) o aguas abajo ($x=L$) no pueden aplicarse las Ecs. (9) y (10) ya que a esas ubicaciones sólo llega una característica: C^- para aguas arriba y C^+ para aguas abajo.

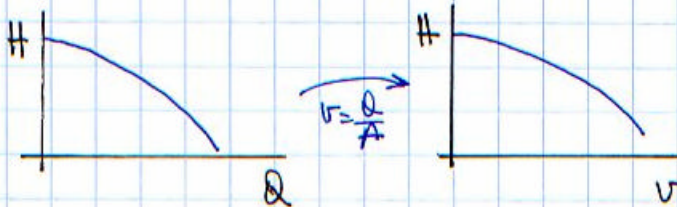
Algunas condiciones de borde usuales en el extremo de aguas arriba son:



- 1°) Estanque a nivel constante:
 $H_p = H_0 = \text{cte}, \forall t$

Ec. (8) permite conocer v_p (C^+)

2º) Caudal suministrado por una bomba con curva característica conocida

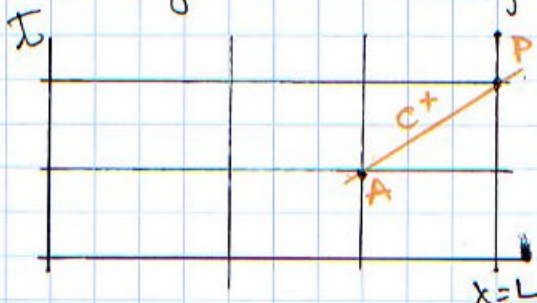


Podemos escribir la curva característica de la bomba en términos de la velocidad:

$$H_p = a + b \cdot v_p + c \cdot v_p^2$$

lo que se usa junto a C⁻ (Ec. 8)

La condición de borde más común en el extremo de aguas abajo corresponde a una orilla que descarga a la atmósfera.



$$Q = vA = C_d A_0 \sqrt{2gH}$$

En el régimen permanente inicial:

$$Q_0 = v_0 A = (C_d A_0)_0 \sqrt{2gH_0}$$

de donde $\frac{v}{v_0} = \frac{C_d A_0}{(C_d A_0)_0} \sqrt{\frac{H}{H_0}} = \eta(t) \sqrt{\frac{H}{H_0}}$

Aplicamos esta ecuación en $x=L$ y obtenemos v_p :

$$v_p = v_0 \eta(t) \sqrt{\frac{H_p}{H_0}} \quad (*)$$

Ec. (*) junto a C⁺ (Ec. 7) nos permiten obtener v_p y H_p .