UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Inteligencia Artificial - CC52A
Control 1 - Semestre Otoño 2010

1. (1 pto)

   - Asuma que $\Sigma \models \alpha \vee \beta$. ¿Es cierto que $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$?
   - Asuma que $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$. ¿Es cierto que $\Sigma \models \alpha \vee \beta$?

   Solución: La primera parte es falsa. Un contraejemplo consiste de $\Sigma = \emptyset$, $\alpha = p$ y $\beta = \neg p$. La segunda parte es cierta. Sea σ una asignación cualquiera tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Dado que $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$, es el caso que $\sigma(\alpha) = 1$ o $\sigma(\beta) = 1$. Concluimos que $\Sigma \models \alpha \vee \beta$.

2. (1pto) Sea α una fórmula de la lógica proposicional. Demuestre que si c es el número de apariciones de conectivos lógicos binarios en α y s es el número de apariciones de variables proposicionales en α, entonces $s = c + 1$

   Solución: Por inducción. El caso base es $\alpha = p$. En este caso $c = 0$, $s = 1$, y por tanto, $s = c + 1$.

   A continuación vemos el caso inductivo. Si $\alpha = \neg\theta$, entonces el número de conectivos binarios c_α en α es el mismo que en θ, y el número s_α de apariciones de variables proposicionales en α es el mismo que en θ. Concluimos entonces por hipótesis inductiva que $s_\alpha = c_\alpha + 1$.

   Considere por último el caso en que $\alpha = \theta \star \psi$. Luego, el número de conectivos binarios c_α en α es $c_\theta + c_\psi + 1$, donde c_θ (resp. c_ψ) es el número de conectivos binarios en θ (resp. ψ). Además, el numero s_α de apariciones de variables proposicionales en α es $s_\theta + s_\psi$, donde s_θ (resp. s_ψ) es el número de apariciones de variables proposicionales en θ (resp ψ). Por HI, $s_\theta = c_\theta + 1$ y $s_\psi = c_\psi + 1$. Concluimos que $s_\alpha = c_\alpha + 1$.

3. (2pts) Dado un grafo $G = (N, A)$, una secuencia de nodos $(a_1, \ldots, a_n)$ es un *camino* en G si $(a_i, a_{i+1}) \in A$, para cada $1 \leq i < n$. Decimos que G contiene un *circuto hamiltoniano* si existe un camino $(a_1, \ldots, a_n)$ en G tal que:

   - n es el número de nodos en N;
   - $a_i \neq a_j$ para cada $1 \leq i, j \leq n$ tal que $i \neq j$;
   - $(a_n, a_1) \in A$.

Encuentre un algoritmo polinomial que, dado un grafo G, construye una fórmula ψ en la lógica proposicional tal que G tiene un circuito hamiltoniano si y solo si ψ es satisfacible.

Nota: Recuerde que un algoritmo es polinomial si el número de pasos que toma es $O(n^c)$, donde n es el tamaño de la entrada y c es una constante.

Solución: Asuma que $N = \{n_1, \dots, n_r\}$ $(r > 0)$. Utilizamos el siguiente conjunto de variables proposicionales: $\{p_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq r\}$. Luego, debemos decir en lógica proposicional las siguientes cosas:

- Para cada $1 \leq i \leq r$ existe un único $1 \leq j \leq r$ tal que $p_{i,j}$ es cierto. Es decir,
$$(\bigwedge_i \bigvee_j p_{i,j}) \wedge (\bigwedge_i \bigwedge_{j \neq j'} p_{i,j} \to \neg p_{i,j'}).$$
Además, para cada $1 \leq i, i' \leq r$ tal que $i \neq i'$, si $p_{i,j}$ y $p_{i',j'}$ son ciertos entonces $j \neq j'$. Formalmente,
$$\bigwedge_{i \neq i'} \bigwedge_j (p_{i,j} \to \neg p_{i',j}).$$
Intuitivamente, j representa la posición en que el nodo v_i aparece en el orden impuesto por el circuito.
- Para cada $1 \leq i, i' \leq r$ y para cada $1 \leq j < r$, si $p_{i,j}$ y $p_{i',j+1}$ es cierto, entonces existe un arco de v_i a $v_{i'}$. Esto es,
$$\bigwedge_{1 \leq j < r} \bigvee_{(v_i, v_{i'}) \in A} p_{i,j} \wedge p_{i',j+1}.$$
De igual forma, si $p_{i,r}$ es cierto y $p_{i',1}$ es cierto, entonces existe arco de v_i a $v_{i'}$. Esto es,
$$\bigvee_{(v_i, v_{i'}) \in A} p_{i,1} \wedge p_{i',r}.$$

4. (2pts) Sean C_1, C_2, C_3 cláusulas y ℓ, r literales. Asuma que ni $C_1' := C_1 \cup \{\ell, r\}$ ni $C_2' := C_2 \cup \{\bar{\ell}\}$ ni $C_3' := C_3 \cup \{\bar{r}\}$ son tautologías. Además asuma lo siguiente:
   - C_1 no contiene ni a ℓ ni a r;
   - C_2 no contiene ni a $\bar{\ell}$ ni a $\bar{r}$:
   - C_3 contiene a ℓ pero no contiene a $\bar{r}$.

Sea Σ el conjunto de cláusulas $\{C_1', C_2', C_3'\}$. Demuestre que la cláusula $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \setminus \{\ell\}$ se puede obtener desde Σ utilizando resolución lineal. Justifique cada uno de sus pasos.

Solución: Hacemos resolución de C_1' con C_2' y obtenemos, $C_1 \cup C_2 \setminus \{r\} \cup \{r\}$. Luego, resolvemos esta clásula con C_3' y obtenemos $C_1 \cup C_2 \setminus \{r\} \cup C_3$. Finalmente hacemos resolución de esta cláusula con C_2 (ya que C_3 contiene a ℓ). Obtenemos $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \setminus \{\ell\}$.