Auxiliar 2 - Lógica de Primer Orden

Cátedra: Inteligencia Artificial
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliar: Miguel Romero

22 de Abril del 2010

1. Cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   (a) $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$
   (b) $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$
   (c) $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi)$
   (d) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x\varphi) \wedge (\exists x\psi)$
   (e) $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x\varphi) \vee (\forall x\psi)$
   (f) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi)$

2. Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, con E un predicado binario. En cada una de las siguientes preguntas escriba una oración de la lógica de primer orden que represente la propiedad mencionada acerca de la $\mathcal{L}$-estructura.
   (a) La estructura es un grafo no dirigido simple.
   (b) Contiene un vertex cover con 3 nodos.
   (c) Tiene un único nodo aislado.
   (d) Todo nodo en el grafo tiene grado 2

3. Encuentre un conjunto de oraciones Σ talque $\mathcal{A}$ es una estructura infinita, si y sólo si $\mathcal{A} \models \Sigma$.

4. Dada una estructura $\mathcal{A}$, decimos que una relación $S \subseteq A^k$ $(k \geq 1)$ es definible en $\mathcal{A}$, si existe una fórmula $\varphi(x_1, ..., x_k)$ talque

   $$S = \{(a_1, ..., a_k) \in A^k : \mathcal{A} \models \varphi(a_1, ..., a_k)\}$$

   Sea la estructura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. Defina las siguientes relaciones: Ser menor o igual, ser cero, ser uno, ser par y ser primo.

5. Sea la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Defina las siguientes relaciones: Ser inverso multiplicativo (relacion binaria), ser mayor estricto.

6. Dada dos estructuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ (sobre el mismo vocabulario), decimos que $h : A \to B$ es un isomorfismo, si es una biyección y cumple que:
   (a) $h(c^A) = c^B$, para cada constante $c \in \mathcal{L}$

(b) $h(f^A(a_1, ..., a_m)) = f^B(h(a_1), ..., h(a_m))$ para cada función m-aria $f \in \mathcal{L}$ y elementos $a_1, ..., a_m$ en A.

(c) $(a_1, ..., a_n) \in R^A$ si y sólo si $(h(a_1), ..., h(a_n)) \in R^B$, para cada relación n-aria $R \in \mathcal{L}$ y elementos $a_1, ..., a_n$ en A.

Si existe tal h decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos ($\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$). El Teorema del Isomorfismo dice lo siguiente:
Sea σ una asignación en la estructura $\mathcal{A}$ y h un isomorfismo de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Entonces para toda fórmula φ

$$(\mathcal{A}, \sigma) \models \varphi \text{ si y sólo si } (\mathcal{B}, h \circ \sigma) \models \varphi$$

Es $(\mathbb{Z}, 0, 1, s, +, \cdot, <)$ isomorfo a $(\mathbb{N}, 0, 1, s, +, \cdot, <)$?. Es $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?.

7. Utilize el Teorema del isomorfismo para probar que

   (a) La relación menor estricto no es definible en $(\mathbb{R}, +)$

   (b) La relación ternaria multiplicación no es definible en $(\mathbb{R}, +)$

   (c) La relación ternaria suma no es definible en $(\mathbb{R}, \cdot)$

   (d) La relación ternaria suma no es definible en $(\mathbb{N}, \cdot)$

   (e) La relación 2^n no es definible en $(\mathbb{N}, \cdot)$

   (f) La relación sucesor no es definible en $(\mathbb{N}, +)$