1 Ordenando Funciones

1. Ordene las siguientes funciones en orden $O()$ creciente, indicando los grupos que tienen el mismo orden: $\sqrt{n}$, $n \log n$, n^2, $n^{1/3} + \log n$, $\ln n$, $(1/3)^n$, n, $n - n^3 + 7n^5$, n^3, $(\log n)^2$, $n/\log n$, $(3/2)^n$, 2^n, $n^2 + \log n$, $\log n$, $n!$, $\log\log n$, 6.

2. Haga lo mismo con las siguientes funciones: $\log n$, $n^2/(\log n)^2$, $n^{3/2}$, $n^2/\log n$, n^2, $n/\log n$, $\sqrt[3]{n}$, 1, $1/n$, 5^n, $n^{1.00001}$, n, $\log\log n$, n^n, $(\log n)^2$, n^{n^2}, 2^n, $(\log n)^n$, $n^{\log n}$.

3. De las funciones de la lista anterior (ordenadas) elija la que representa un mejor $O()$ y la que representa un mejor $\Omega()$ para las siguientes: $1/\log n$, $7n^5 - 3n + 2$, $(n^2 + n)/(\log^2 n + \log n)$, $2^{(\log n)^2}$, 3^n.

4. Diga si es cierto o no: n^2 es $O(n^3)$, n^3 es $O(n^2)$, $2n^2 + 1$ es $O(n^2)$, $n \log n$ es $O(n\sqrt{n})$, $\sqrt{n}$ es $O(\log n)$, $\log n$ es $O(\sqrt{n})$, n^3 es $O(n^2(1+n^2))$, $n^2(1+\sqrt{n})$ es $O(n^2)$, $n^2(1+\sqrt{n})$ es $O(n^2 \log n)$, $3n^2 + \sqrt{n}$ es $O(n^2)$, $3n^2 + \sqrt{n}$ es $O(n + n\sqrt{n} + \sqrt{n})$, $\log n + \sqrt{n}$ es $O(n)$, $\sqrt{n}\log n$ es $O(n)$, $1/n$ es $O(\log n)$, $\log n$ es $O(1/n)$, $\log n$ es $O(n^{-1/2})$, $n + \sqrt{n}$ es $O(\sqrt{n}\log n)$.

5. De los siguientes pares f y g, determine si f es $O(g)$, $\Omega(g)$, $\Theta(g)$, $o(g)$ o $\omega(g)$: $n^2 + 3n + 4$ vs $6n + 7$, $\sqrt{n}$ vs $\log(n + 3)$, $n\sqrt{n}$ vs $n^2 - n$, $n\sqrt{n}$ vs $4n\log(n^2 + 1)$,$(n^2 + 2)/(1 + 2^{-n})$ vs $n + 3$, $2^n - n^2$ vs $n^4 + n^2$, $n \log n$ vs $(\log n)^{\log n}$, $n2^n$ vs 3^n, $100n + \log n$ vs $n + (\log n)^2$, $\log n$ vs $\log\log n^2$, $(\log n)^{10^6}$ vs $n^{10^{-6}}$.

2 Manipulación de $O()$

Se puede definir $O(g(n))$ como el conjunto de todas las funciones que son $O(g(n))$. Así, "$f(n)$ es $O(g(n))$" se puede reescribir como $f(n) \in O(g(n))$. Abusando de la notación se dice $f(n) = O(g(n))$.

En los siguientes ejercicios, sea $e(n) = o(1)$, $f_i(n) = O(g_i(n))$ y $f_i(n) = \Omega(h_i(n))$. Pruebe que

1. $O(O(f(n)) = O(f(n))$.

2. $f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n)) + g_2(n))$ y $\Omega(h_1(n) + h_2(n))$.

3. $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n)), g_2(n)))$ y $\Omega(\min(h_1(n), h_2(n)))$.

4. $f_1(n)f_2(n) = O(g_1(n))g_2(n))$ y $\Omega(h_1(n)h_2(n))$.

5. $f_1(n)/f_2(n) = O(g_1(n))/h_2(n))$ y $\Omega(h_1(n)/g_2(n))$.

6. $2^{(1+e(n))} = 2 + O(e(n))$ (use Taylor).

7. $(1 + e(n))^2 = 1 + O(e(n))$.

8. $f(n)/(1 + e(n)) = f(n)(1 + O(e(n)))$.

3 Recurrencias y Funciones Generatrices

Resuelva las siguientes recurrencias sin usar y usando funciones generatrices. La solución debe ser exacta para infinitos n (diga cuáles).

1. $T(n) = T(n-1) + n - 1$, $T(1) = 2$
2. $T(n) = 3T(n-1) + 2$, $T(1) = 1$.
3. $T(n) = 6T(n/6) + 2n + 3$, $T(1) = 1$.
4. $T(n) = 4T(n/3) + 3n - 5$, $T(1) = 2$.
5. $T(n) = T(n/4) + \sqrt{n} + 1$, $T(1) = 1$.
6. $T(n) = T(n-2) + n$, $T(0) = c, T(1) = d$. Resuelva para *todo* n.
7. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n$, $x_0 = x_1 = 1$.

4 Recurrencias más Complejas

1. Resuelva $T(0) = 0$, $T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)$
2. Intente resolver lo anterior si la suma llega hasta n. Qué ocurre? Cuál es la explicación?
3. Resuelva $T(0) = 0$, $T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + T(n-i)$
4. Resuelva el sistema de recurrencias: $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 2b_n$, con $a_0 = 1$ y $b_0 = -1$.
5. Pruebe una versión más general del Teorema Maestro, donde el paso recursivo dice $T(n) = aT(n/c) + bn^k$.
6. Resuelva
$$T(n) = \sum_{i=1}^{\ln n} T(n/e^i) + ln(n)^2$$
para $n \geq 1$, e indique para qué valores de n es exacta su solución.
7. Resuelva
$$a_n = \frac{a_{n/2}^{3/2} a_{n/4}^{3/2}}{\sqrt{2} a_{n/8}}$$
con $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 4$, en forma exacta para potencias de 2. Encuentre el orden del resultado y exprese el error de la aproximación con notación $O()$.
8. Resolver $S(n) = nS(n/2)$, $S(1) = 1$.
9. Obtenga el orden $\Theta()$ de la siguiente recurrencia: $f(n) = f(\alpha n) + f(\beta n) + cn$, donde $\alpha + \beta = 1$ y son positivos. Ayuda: ud. conoce el resultado para $\alpha = \beta = 1/2$.