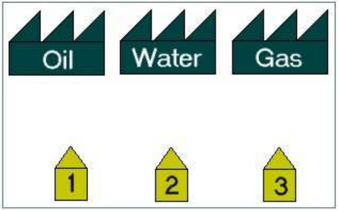
Capítulo 4: Grafos

Clase 3: Grafos planares y Colorabilidad de Grafos

Matemática Discreta - CC3101
Profesor: Pablo Barceló

Problema de las utilidades

Se tienen 3 casas y 3 utilidades (gas, aceite y agua) como se muestra en la figura.



¿Se puede conectar cada utilidad a cada casa de modo que las conexiones no se crucen?

Grafos planares

Este problema está relacionado con la siguiente noción:

Definition

Un grafo G es planar si puede ser dibujado en el plano sin que sus arcos se intersecten.

Grafos planares

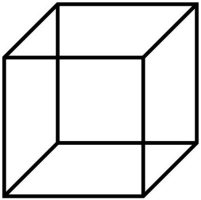
Este problema está relacionado con la siguiente noción:

Definition

Un grafo G es planar si puede ser dibujado en el plano sin que sus arcos se intersecten.

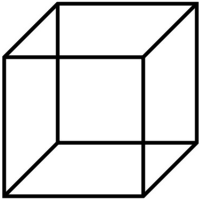
Por tanto, el problema anterior se reduce a verificar si $K_{3,3}$ es planar.

Ejercicio: Demuestre que el siguiente grafo es planar.



Ejercicios

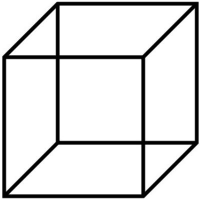
Ejercicio: Demuestre que el siguiente grafo es planar.



Ejercicio: Responda la pregunta inicial, i.e. ¿es $K_{3,3}$ planar?

Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que el siguiente grafo es planar.



Ejercicio: Responda la pregunta inicial, i.e. ¿es $K_{3,3}$ planar?

Ejercicio: Demuestre que K_5 no es planar.

Regiones de un grafo

La representación planar de un grafo divide al plano en regiones, incluyendo una ilimitada (la exterior).

Regiones de un grafo

La representación planar de un grafo divide al plano en regiones, incluyendo una ilimitada (la exterior).

Por ejemplo,

Fórmula de Euler

Euler demostró que todas las representaciones planares de un grafo simple planar tienen la misma cantidad de regiones:

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple que es conexo y planar. Sea r el número de regiones en una representación planar de G. Luego,

$$r = |E| - |V| + 2$$

Fórmula de Euler

Euler demostró que todas las representaciones planares de un grafo simple planar tienen la misma cantidad de regiones:

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple que es conexo y planar. Sea r el número de regiones en una representación planar de G. Luego,

$$r = |E| - |V| + 2$$

A continuación demostraremos este teorema.

Demostración

Asumamos una representación planar de G.

Construiremos una secuencia

$$G_1, G_2, \ldots, G_{|E|}$$

de subgrafos de G, agregando un arco en cada paso, de tal forma que:

- G_1 se compone de un arco arbitrario de G;
- G_{n+1} se obtiene desde G_n agregando un arco cualquiera que no esté en G_n, y que sea incidente a un vértice en G_n.

Note que esta definición es correcta pues el grafo es conexo.

Claramente, cada grafo G_j es planar, $j \in [1, |E|]$, y $G_{|E|} = G$.

Demostración

Demostraremos por inducción que para todo $j \in [1, |E|]$, $G_j = (V_j, E_j)$ satisface

$$r_j \;=\; |E_j| - |V_j| + 2,$$

donde r_j es el número de regiones en la representación planar de G_j.

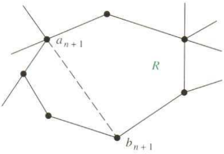
El caso base es trivial, pues G_1 tiene solo una región, dos nodos y un arco.

Considere ahora el grafo G_{j+1}, para $j \in [1, |E| - 1]$, y sea $\{v, v'\}$ el arco agregado para construir G_{j+1} desde G_j.

Analizaremos dos casos a continuación.

Demostración

Caso 1: Los vértices v y v' pertenecían a G_j. Esto se ilustra en la siguiente figura:

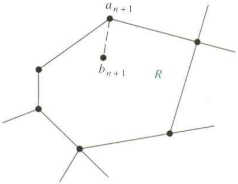


Esto quiere decir que v y v' están en el límite de la misma región R de G_j. Por tanto, R queda dividido en dos regiones en G_{j+1}.

Concluimos que $r_{j+1} = r_j + 1$, $|E_{j+1}| = |E_j| + 1$, y $|V_{j+1}| = |V_j|$.

$$\therefore \; r_{j+1} = |E_{j+1}| - |V_{j+1}| + 2.$$

Caso 2: Uno de v o v' no pertenecía a G_j. Esto se ilustra en la siguiente figura.



Por tanto, el arco (v, v') no genera regiones nuevas. Además, $|E_{j+1}| = |E_j| + 1$ y $|V_{j+1}| = |V_j| + 1$.

$$\therefore \; r_{j+1} = |E_{j+1}| - |V_{j+1}| + 2.$$

Algunos corolarios de la fórmula de Euler

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple que es conexo y planar. Entonces, si* $|V| \geq 3$ *se tiene que* $|E| \leq 3|V| - 6$.

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple que es conexo y planar. Entonces* G *tiene un vértice de grado a lo más 5.*

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple que es conexo y planar. Entonces, si* $|V| \geq 3$ *y* G *no tiene circuitos de largo 3, se tiene que* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Algunos corolarios de la fórmula de Euler

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple que es conexo y planar. Entonces, si* $|V| \geq 3$ *se tiene que* $|E| \leq 3|V| - 6$.

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple que es conexo y planar. Entonces* G *tiene un vértice de grado a lo más 5.*

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple que es conexo y planar. Entonces, si* $|V| \geq 3$ *y* G *no tiene circuitos de largo 3, se tiene que* $|E| \leq 2|V| - 4$.

Note que del primer (resp. tercer) corolario se sigue inmediatamente que K_5 (resp. $K_{3,3}$) no es planar.

Caracterización de los grafos planares

Hemos visto que ni K_5 ni $K_{3,3}$ son grafos planares.

Sorprendentemente, es posible caracterizar a los grafos planares precisamente como los que no *contienen* a ninguno de estos dos grafos.

El problema es, precisamente, qué significa *contener* en este caso.

Hemos visto que ni K_5 ni $K_{3,3}$ son grafos planares.

Sorprendentemente, es posible caracterizar a los grafos planares precisamente como los que no *contienen* a ninguno de estos dos grafos.

El problema es, precisamente, qué significa *contener* en este caso.

Teorema (Kuratowski, 1930)

Un grafo simple no es planar si y solo si contiene un subgrafo homeomórfico a $K_{3,3}$ o a K_5.

Caracterización de los grafos planares

Hemos visto que ni K_5 ni $K_{3,3}$ son grafos planares.

Sorprendentemente, es posible caracterizar a los grafos planares precisamente como los que no *contienen* a ninguno de estos dos grafos.

El problema es, precisamente, qué significa *contener* en este caso.

Teorema (Kuratowski, 1930)

Un grafo simple no es planar si y solo si contiene un subgrafo homeomórfico a $K_{3,3}$ o a K_5.

A continuación definiremos cuándo dos grafos son homeomórficos.

Grafos homeomórficos

Una subdivisión elemental de un grafo G se obtiene al reemplazar un arco (u, v) en G por dos arcos (u, w) y (w, v), donde w es un nuevo nodo.

Note que esta operación conserva la planaridad.

Decimos que dos grafos son homeomórficos si se pueden obtener desde el mismo grafo mediante una secuencia de subdivisiones elementales.

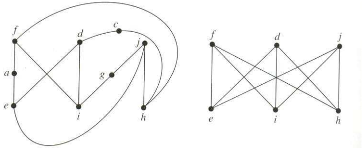
Grafos homeomórficos

Una subdivisión elemental de un grafo G se obtiene al reemplazar un arco (u, v) en G por dos arcos (u, w) y (w, v), donde w es un nuevo nodo.

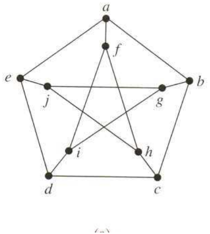
Note que esta operación conserva la planaridad.

Decimos que dos grafos son homeomórficos si se pueden obtener desde el mismo grafo mediante una secuencia de subdivisiones elementales.

Ejercicio: Demuestre que los siguientes grafos son homeomórficos.



Ejercicio: Demuestre que el grafo de Petersen (a continuación) no es planar.



Colorabilidad

Definition

Una coloración de un grafo simple G es una asignación de colores a los vértices de G de tal forma que vértices adyacentes reciben colores distintos.

Por supuesto, todo grafo simple con n vértices puede ser coloreado con n colores, pero muchos grafos pueden ser coloreados con menos colores.

Definition

El número cromático de un grafo simple G, denotado por $\chi(G)$, es el menor número de colores que se necesitan para colorear a G.

Ejercicios

Ejercicio: ¿Cuál es el número cromático de K_n? ¿Cuál es el número cromático de $K_{m,n}$?

Ejercicio: ¿Cuál es el número cromático de C_n? ¿Y el de W_n?

Ejercicio: ¿Cuántos colores se necesitan para colorear a los siguientes grafos?

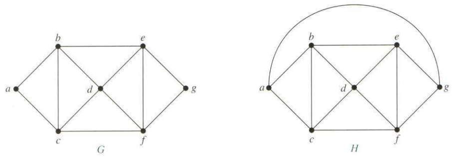


FIGURE 3 The Simple Graphs G and H.

Four color Theorem

Pregunta: ¿Cuántos colores se necesitan para colorear un grafo planar?

Pregunta: ¿Cuántos colores se necesitan para colorear un grafo planar?

Esta fue una pregunta abierta por más de 100 años. Su solución es un famoso resultado en matemáticas que se conoce como four color theorem.

Teorema (Appel & Haken, 1976)

Sea G un grafo simple, conexo y planar. Entonces $\chi(G) \leq 4$.

Su demostración, además, se prestó para enorme controversia.

Una versión mas débil del teorema

Demuestre lo siguiente por inducción en el número de vértices, y la ayuda de agunos resultados acerca de grafos planares que ya vimos:

Proposición

Sea G un grafo simple, conexo y planar. Entonces $\chi(G) \leq 6$.